

Matematika 10

Négyzetgyök

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár



2015. szeptember 27.

copyright: ©Juhász László
Ennek a könyvnek a használatát szerzői jog
védi. A megvásárlásra vonatkozó
információkért kérem látogasson el honlapomra.
www.bioszoft.hu

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

1. Négyzetgyök

1.1. Négyzetszámok

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 = 11^2 ,
144 = 12^2 , 169 = 13^2 , 196 = 14^2 , 225 = 15^2 ,
256 = 16^2 , 289 = 17^2 , 324 = 18^2 , 361 = 19^2 ,
400 = 20^2 , 625 = 25^2 , 900 = 30^2 , 1024 = 32^2

1.2. Főbb nevezetes azonosságok

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1.3. A négyzetgyök fogalma

Ha $a \geq 0$ akkor $(\sqrt{a})^2 = a$ és $\sqrt{a} \geq 0$.

megjegyzés1: $\sqrt{a^2} = |a|$, ahol $a \in \mathbb{R}$

megjegyzés2: $\sqrt{4225} = 65$, mert $60^2 = 3600$
és $70^2 = 4900$, másrészt a keresett szám 5-re
végződik

és $(60 + 5)^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$

1.4. Az n . gyök fogalma

-ha n páros szám és $a \geq 0$: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ és $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

-ha n páratlan: $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

például: $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[4]{-16} = -$;
 $\sqrt[5]{1} = 1$; $\sqrt[5]{-1} = -1$; $\sqrt[6]{-1} = -$; $\sqrt[100]{0} = 0$;

1.5. Tört nevezőjének gyöktelenítése

$$\begin{aligned}\frac{a}{b\sqrt{c}} &= \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot 1 = \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc} \\ \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}+g\sqrt{h}} &= \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}+g\sqrt{h}} \cdot 1 = \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}+g\sqrt{h}} \cdot \frac{e\sqrt{f}-g\sqrt{h}}{e\sqrt{f}-g\sqrt{h}} = \\ &= \frac{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(e\sqrt{f}-g\sqrt{h})}{e^2f-g^2h} \\ \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}-g\sqrt{h}} &= \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}-g\sqrt{h}} \cdot 1 = \frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{e\sqrt{f}-g\sqrt{h}} \cdot \frac{e\sqrt{f}+g\sqrt{h}}{e\sqrt{f}+g\sqrt{h}} = \\ &= \frac{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(e\sqrt{f}+g\sqrt{h})}{e^2f-g^2h}\end{aligned}$$

1.6. Feladat - egyszerű műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel 5 perc

- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = ?$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = ?$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = ?$
d) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = ?$ e) $(\sqrt{2})^2 = ?$ f) $(\sqrt{3})^2 = ?$
g) $4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = ?$ h) $(3\sqrt{2})^2 = ?$ i) $(2\sqrt{3})^2 = ?$

j) $\sqrt{9 + 16} = ?$ k) $\sqrt{(-4)^2} = ?$

Tipp: Lásd 1.3 itt: 2.

M:

a) $\sqrt{6}$; b) 2; c) 3; d) $6\sqrt{6}$; e) 2; f) 3; g) $20\sqrt{6}$; h) 18; i) 12; j) 5; k) 4

1.7. Feladat - műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel
9 perc

- a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = ?$
b) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) = ?$
c) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) = ?$
d) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = ?$
e) $(5\sqrt{2} - \sqrt{10})(5\sqrt{2} + \sqrt{10}) = ?$
f) $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = ?$
g) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{5})(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}) = ?$
h) $(5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) = ?$
i) $\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}} = ?$

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2.

M:

a) -1; b) 2; c) 10; d) 15; e) 40; f) 19; g) -17; h)

7; i) 3

1.8. Feladat - műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel
12 perc

a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = ?$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = ?$

c) $(7 - \sqrt{5})^2 = ?$

d) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 = ?$

e) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = ?$

f) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = ?$

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2.

M:

a) $5 - 2\sqrt{6}$; b) $5 + 2\sqrt{6}$; c) $54 - 14\sqrt{5}$; d) $12 + 2\sqrt{35}$; e) $14 - 4\sqrt{6}$; f) $14 + 4\sqrt{6}$;

1.9. Feladat - műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel
12 perc

a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = ?$

b) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) = ?$

c) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = ?$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = ?$

$$e) (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = ?$$

M:

- a) $2 + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{15}$; b) $54 - 22\sqrt{6}$; c) $14 - 8\sqrt{10}$;
d) $7 + 2\sqrt{10}$; e) $30 - 12\sqrt{6}$

1.10. Feladat - kihozatal a gyökjel alól 9 perc

- a) A $\sqrt{8}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
b) A $\sqrt{18}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
c) A $\sqrt{50}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
d) A $\sqrt{98}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
e) A $\sqrt{32}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
f) A $2\sqrt{75}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.
g) A $0.5\sqrt{48}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.

h) A $3\sqrt{125}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.

i) A $5\sqrt{108}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.

j) A $7\sqrt{200}$ kifejezést fejezd ki $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok és q minimális.

Tipp: Lásd 1.1 itt: 2. Alakíts szorzattá a lehető legnagyobb négyzetszámmal.

M:

a) $2\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{2}$; d) $7\sqrt{2}$; e) $4\sqrt{2}$; f) $10\sqrt{3}$; g) $2\sqrt{3}$; h) $15\sqrt{5}$; i) $30\sqrt{3}$; j) $70\sqrt{2}$;

1.11. Feladat - tört egyszerűsítése négyzetgyökös kifejezéssel 6 perc

Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27+\sqrt{75}}}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50+\sqrt{98}}}$; c) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45+\sqrt{80}}}$; d) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{98+\sqrt{200}}}$;
e) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{108+\sqrt{3}}}$; f) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{112+\sqrt{175}}}$;

Tipp: Lásd az előző feladatot vagy keresd meg a megfelelő számot és egyszerűsíts.

M:

- a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{2}{7}$; d) $\frac{8}{17}$; e) $\frac{4}{5}$; f) $\frac{2}{9}$;

1.12. Feladat - tört egyszerűsítése 12 perc

Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

- a) $\frac{2+\sqrt{20}}{2}$; b) $\frac{4-\sqrt{12}}{2}$; c) $\frac{2+\sqrt{28}}{2}$; d) $\frac{6-\sqrt{18}}{3}$; e) $\frac{5+\sqrt{50}}{5}$;
f) $\frac{8-\sqrt{32}}{2}$

Tipp: Ha valamit beviszünk a gyökjel alá, négyzetre kell emelni.

M:

- a) $1 + \sqrt{5}$; b) $2 - \sqrt{3}$; c) $1 + \sqrt{7}$; d) $2 - \sqrt{2}$; e)
 $1 + \sqrt{2}$; f) $4 - \sqrt{8}$;

1.13. Feladat - négyzetgyökös kifejezések összeadása 8 perc

- a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$ kifejezést írd fel $p\sqrt{q}$ alakban,
ahol p és q egész számok.
b) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ kifejezést írd fel $p\sqrt{q}$ alakban, ahol
 p és q egész számok.
c) $2\sqrt{200} - 3\sqrt{32}$ kifejezést írd fel $p\sqrt{q}$ alakban,
ahol p és q egész számok.
d) $4\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$ kifejezést írd fel $p\sqrt{q}$ alakban,

ahol p és q egész számok.

e) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 3\sqrt{75}$ kifejezést írd fel $p\sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

M:

a) $8\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $8\sqrt{2}$; d) $7\sqrt{3}$; e) $7\sqrt{3}$;

1.14. Feladat - tört nevezőjének gyöktelenítése 8 perc

a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{2}$ alakban, ahol k egész szám.

b) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{2}$ alakban, ahol k egész szám.

c) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{3}$ alakban, ahol k egész szám.

d) $\frac{10}{\sqrt{2}} - \sqrt{18}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{2}$ alakban, ahol k egész szám.

e) $\frac{15}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{3}$ alakban, ahol k egész szám.

f) $\frac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{80}$ kifejezést írd fel $k\sqrt{5}$ alakban, ahol k egész szám.

Tipp1: Lásd 1.5 itt: 3

Tipp2: Lásd Feladat 1.13 itt: 8

M:

a) $3\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) $6\sqrt{5}$;

1.15. Feladat - tört nevezőjének a gyöktelenítése;
20 perc

a) $\frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ kifejezést írd fel $p + \sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

b) $\frac{21\sqrt{2}-12\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ kifejezést írd fel $p + \sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

c) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ kifejezést írd fel $p + \sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

d) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ kifejezést írd fel $p + \sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

e) $\frac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$ kifejezést írd fel $p + \sqrt{q}$ alakban, ahol p és q egész számok.

Tipp: Lásd 1.5 itt: 3

M:

a) $3 + \sqrt{6}$; b) $6 - \sqrt{6}$; c) $4 + \sqrt{10}$; d) $-1 + \sqrt{2}$;
e) $1 + \sqrt{6}$

1.16. Feladat+ művelet gyökös kifejezéssel 18 perc
(2-2 megoldás)

a) Határozd meg a pontos értékét a következő kifejezésnek: $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

b) Határozd meg a pontos értékét a következő kifejezésnek: $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$.

Tipp1: Emelj négyzetre vagy keress teljes négyzetet.

Tipp2: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$

M:

a) 4; b) -2