Matematika 10
Másodfokú egyenletek

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár

*

2015. szeptember 27.

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

1. Másodfokú egyenlet

1.1. Főbb nevezetes azonosságok

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.2. Másodfokú egyenlet

A $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldása(i) (feltéve, hogy $a \neq 0; b^2 - 4ac \geq 0$) : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1.3. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = b^2 - 4ac$
-ha $D > 0$: az egyenletnek két különböző valós gyöke van
-ha $D = 0$: az egyenlet két gyöke megegyezik (egy valós gyök)
-ha $D < 0$: az egyenletnek nincsen valós gyöke

1.4. Parabola csúcsa és szimmetria tengelye

Az $y = p(x-q)^2 + r$ $(p \neq 0)$ parabola
-csúcsának koordinátái: (q, r)
-szimmetria tengelyének az egyenlete: $x = q$.

1.5. Másodfokú kifejezés szorzattá alakítása

Ha $a \neq 0$ és $b^2 - 4ac \geq 0$ akkor $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, ahol x_1 és x_2 az $ax^2+bx+c = 0$ egyenlet két gyöke.

1.6. Azonosság fogalma

Ha $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ minden x-re, akkor $a = p$ és $b = q$ és $c = r$.
jelölés: $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$

1.7. Függvény transzformáció

Az $f(x)$ függvény grafikonját az alábbi függvény grafikonjába átvivő transzformáció:
$f(-x)$: tükrözés az y tengelyre
$-f(x)$: tükrözés az x tengelyre
$f(x-a)$, ahol $a > 0$: x tengely menti eltolás a

értékkel pozitív irányban
$f(x+a)$, ahol $a>0$: x tengely menti eltolás a értékkel negatív irányban
$f(x)+a$, ahol $a>0$: y tengely menti eltolás a értékkel pozitív irányban
$f(x)-a$, ahol $a>0$: y tengely menti eltolás a értékkel negatív irányban
$af(x)$, ahol $a>0$: y tengely menti a-szoros nyújtás
$f(ax)$, ahol $a>0$: x tengely menti $\frac{1}{a}$-szoros nyújtás

1.8. Feladat - másodfokú egyenletek 20 perc

Keresd meg az alábbi egyenletek gyökeit:
a) $3x^2-7x+2=0$.
b) $2x^2-x-3=0$.
c) $3x^2-5x+5=0$.
d) $x^2-6x+9=0$.
e) $5x^2+13x-6=0$.
f) $5x^2+15x=0$.
g) $5x^2-45=0$.

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2 vagy alakíts szorzattá.
M:
a) 2, $\frac{1}{3}$; b) 1.5, -1; c) $x \in \emptyset$; d) 3; e) $-3, \frac{2}{5}$; f) 0, -3; g) 3, -3

1.9. Feladat - másodfokú egyenletek 5 perc

a) Oldd meg az alábbi egyenletet: $x^2-2x-4=0$. A végeredményt egyszerűsítsd!
b) Oldd meg az alábbi egyenletet: $2x^2+8x+4=0$. A végeredményt egyszerűsítsd!

Tipp1: Lásd 1.2 itt: 2.
M:
a) $1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}$; b) $-2+\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}$;

1.10. Feladat+ másodfokú egyenletek megoldása fejben 18 perc

Számold ki fejben az alábbi egyenletek gyökeit:
a) $x^2-5x+6=0$; b) $x^2-7x+12=0$; c) $x^2-9x+20=0$; d) $x^2-5x+10=0$; e) $x^2-11x+30=0$; f) $x^2-13x+30=0$; g) $x^2-17x+30=0$; h) $x^2-31x+30=0$;

i) $x^2 - x - 30 = 0$; j) $x^2 + x - 30 = 0$; k) $x^2 - 13x - 30 = 0$; l) $x^2 + 13x + 30 = 0$; m) $x^2 + 2x - 15 = 0$; n) $x^2 + 9x + 18 = 0$;

Tipp: Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletben a gyökök szorzata c, a gyökök összege pedig $-b$.
M:
a) 2, 3; b) 3, 4; c) 4, 5; d) $x \in \emptyset$ (nincsen valós megoldás); e) 5, 6; f) 3, 10; g) 2, 15; h) 1, 30; i) 6, -5; j) 5, -6; k) 15, -2; l) -3, -10; m) 3, -5; n) -3; -6

1.11. Feladat - másodfokú kifejezések átalakításai 33 perc

Végezd el a műveleteket:
a) $(x + 3)(3x - 2) - 5(x - 3)^2$.
b) $(5x - 2)(x - 3) - 2(x - 4)^2$.
c) $(x - 2)(2x - 4) - 3(2x + 5)^2$.
d) $(2x - 3)(2x + 3) - (x - 1)^2$.
e) $(x + 2)(3x - 6) - 5(3x - 2)^2$.
f) $(x - 4)(5x + 2) - 2(x + 6)^2$.
g) $(x - 3)(x + 1)^2$.
h) $(x + 5)(x - 2)^2$.

Tipp: Lásd 1.1 itt: 2.
M:
a) $-2x^2+37x-51$; b) $3x^2-x-26$; c) $-10x^2-68x-67$; d) $3x^2+2x-10$; e) $-42x^2+60x-32$; f) $3x^2-42x-80$; g) x^3-x^2-5x-3; h) $x^3+x^2-16x+20$;

1.12. Feladat - azonosságok 20 perc

a) Feltéve, hogy $x^2-2x+3=px^2+qx+r$ minden x esetén, határozd meg p,q,r konstansok értékét.
b) Feltéve, hogy $2x^2+px+8=q(x+1)^2+r$ minden of x esetén, határozd meg p,q,r konstansok értékét.
c) Feltéve, hogy $3x^2+px+7=q(x-2)^2+r$ minden of x esetén, határozd meg p,q,r konstansok értékét.
d) Feltéve, hogy $qx^2-30x+r=5(x-p)^2-2$ minden of x esetén, határozd meg p,q,r konstansok értékét.

Tipp: Lásd 1.6 itt: 3.

M:
a) $p = 1; q = -2; r = 3$; b) $p = 4; q = 2; r = 6$; c) $p = -12; q = 3; r = -5$; d) $p = 3; q = 5; r = 43$;

1.13. Feladat - teljes négyzetté alakítás; 10 perc

Az alábbi kifejezéseket hozd $(x + b)^2 + c$ alakra, ahol b és c valós számok.
a) $x^2 + 6x + 3$; b) $x^2 - 8x - 5$; c) $x^2 + 10x + 2$; d) $x^2 - 14x - 5$; e) $x^2 + 2x + 3$; f) $x^2 - 16x + 3$; g) $x^2 - 3x + 2$

Tipp: x együtthatójának a felét keresd meg, majd vond ki a négyzetét. Ellenőrizd le a megoldásod.
M:
a) $(x+3)^2 - 6$; b) $(x-4)^2 - 21$; c) $(x+5)^2 - 23$; d) $(x-7)^2 - 54$; e) $(x+1)^2 + 2$; f) $(x-8)^2 - 61$; g) $(x - 1.5)^2 - 0.25$

1.14. Feladat - teljes négyzetté alakítás; 30 perc

Az alábbi kifejezéseket hozd $a(x+b)^2+c$ alakra, ahol a, b és c valós számok.
a) $2x^2+12x+20$; b) $2x^2+8x-2$; c) $2x^2-4x-6$; d)

$2x^2-16x-8$; e) $2x^2-12x-10$; f) $2x^2+20x+30$; g) $3x^2-24x+21$; h) $2x^2-20x+31$; i) $2x^2+16x+15$;

Tipp: 1. lépés: emeld ki x együtthatóját; 2. lépés: a zárójelen belül végezd el az előző feladatban lévő átalakítást; 3. lépés: szorozz vissza; Ellenőrizd a megoldásod.
M:
a) $2(x+3)^2+2$; b) $2(x+2)^2-10$; c) $2(x-1)^2-8$; d) $2(x-4)^2-40$; e) $2(x-3)^2-28$; f) $2(x+5)^2-20$; g) $3(x-4)^2-27$; h) $2(x-5)^2-19$; i) $2(x+4)^2-17$;

1.15. Feladat - teljes négyzetté alakítás; 12 perc

Az alábbi kifejezéseket hozd $-(x+b)^2+c$ alakra, ahol b és c valós számok.
a) $-x^2-8x-3$; b) $-x^2+2x+5$; c) $-x^2-10x-7$; d) $-x^2+6x+9$; e) $-x^2-12x-3$;

Tipp: 1. lépés: emelj ki -1-et; 2. lépés: a zárójelen belül végezd el a 1.13 feladatban lévő átalakítást; 3. lépés: szorozz vissza; Ellenőrizd a megoldásod.

M:
a) $-(x+4)^2+13$; b) $-(x-1)^2+6$; c) $-(x+5)^2+18$; d) $-(x-3)^2+18$; e) $-(x+6)^2+33$;

1.16. Feladat - teljes négyzetté alakítás; a parabola csúcspontja; a parabola szimmetria tengelye; 30 perc

a)
(i) Fejezd ki az $x^2-8x+12$ másodfokú kifejezést $(x \pm p)^2 \pm q$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = x^2 - 8x + 12$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
b)
(i) Fejezd ki az $x^2+6x+20$ másodfokú kifejezést $(x \pm p)^2 \pm q$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = x^2 + 6x + 20$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
c)
(i) Fejezd ki a $2x^2 - 20x + 43$ másodfokú kife-

jezést
$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 - 20x + 43$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
d)
(i) Fejezd ki a $2x^2 + 4x + 11$ másodfokú kifejezést
$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 + 4x + 11$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
e)
(i) Fejezd ki a $2x^2 - 28x + 69$ másodfokú kifejezést
$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 - 28x + 69$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
f)
(i) Fejezd ki a $-x^2 - 6x + 10$ másodfokú kifejezést

$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = -x^2 - 6x + 10$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.

Tipp: Lásd 1.4 itt: 3.
M:
a) (i) $(x-4)^2 - 4$; (ii) $V(4, -3)$; (iii) $x = 4$
b) (i) $(x+3)^2 + 11$; (ii) $V(-3, 11)$; (iii) $x = -3$
c) (i) $2(x-5)^2 - 7$; (ii) $V(5, -7)$; (iii) $x = 5$
d) (i) $2(x+1)^2 + 9$; (ii) $V(-1, 9)$; (iii) $x = -1$
e) (i) $2(x-7)^2 - 29$; (ii) $V(7, -29)$; (iii) $x = 7$
f) (i) $-(x+3)^2 + 19$; (ii) $V(-3, 19)$; (iii) $x = -3$

1.17. Feladat - másodfokú polinom szorzattá alakítása; 24 perc

a) Fejezd ki a $2x^2 - 11x + 15$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós számok.
b) Fejezd ki a $3x^2 + 5x - 2$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós

számok.
c) Fejezd ki a $5x^2+5x-10$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós számok.
d) Fejezd ki az $x^2+8x+15$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós számok.
e) Fejezd ki a $2x^2+5x-25$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós számok.
f) Fejezd ki a $3x^2-7x-20$ másodfokú kifejezést $p(x-q)(x-r)$ alakban, ahol p, q és r valós számok.

Tipp: Lásd 1.5 itt: 3.
M:
a) $2(x-2.5)(x-3)$; b) $3(x+2)(x-\frac{1}{3})$; c) $5(x-1)(x+2)$; d) $(x+3)(x+5)$; e) $2(x+5)(x-2.5)$; f) $3(x-4)(x+\frac{5}{3})$

1.18. Feladat - elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása; 4 perc

Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.
a) $-x > 6$.
b) $-2x > 6$.
c) $-2 > 6 - 2x$.

Tipp: Ha negatív számmal szorzod vagy osztod az egyenletet, fordítsd meg a relációs jelet.
M:
a) $x < -6$; b) $x < -3$; c) $x > 4$;

1.19. Feladat - Másodfokú egyenlőtlenségek; 40 perc

Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.
a) $x^2 - 4x < -3$.
b) $x^2 + 3 > 4x$.
c) $x^2 - 7x + 10 < 0$.
d) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$.
e) $x^2 - 4x + 5 > 0$.

f) $x^2 - 4x + 5 < 0$.
g) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.
h) $-2x^2 + 5x - 5 > 0$.
i) $-3x^2 - 6x - 10 < 0$.
j) $x^2 + 2.25 > 3x$.
k) $x^2 + 2.25 \leq 3x$.

Tipp:
1. lépés: nullára redukálás
2. lépés: zérus hely megkeresése (mintha egyenlet lenne)
3. lépés: parabola ábrázolása a zérus helyek figyelembe vételével (ha x^2 együtthatója negatív, akkor megfordítva kell ábrázolni)
4. lépés: a megoldás leolvasása
M:
a) $1 < x < 3$; b) $x < 1$ or $x > 3$; c) $2 < x < 5$; d) $x \leq 2$ or $x \geq 5$; e) $x \in \mathbb{R}$ (minden valós szám megoldás); f) $x \in \emptyset$ (nincsen megoldás); g) $-1 < x < 4$; h) $x \in \emptyset$ (nincsen megoldás); i) $x \in \mathbb{R}$ (minden valós szám megoldás); j) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1.5\}$; k) $x = 1.5$;

1.20. Feladat - elsőfokú és másodfokú egyenlőtlenségek alkalmazása; 10 perc

Egy téglalap alakú szoba szélessége x méter. A hossza 3 méterrrel több, mint a szélessége. Feltéve, hogy a szoba kerülete nagyobb, mint 22 méter,
(i) mutasd meg, hogy $x > 4$.
(ii) figyelembe véve, hogy az előző feltétel mellett a szoba területe kevesebb, mint 40 m^2 határozd meg x lehetséges értékeit.

Tipp: Készíts ábrát. Lásd az előző feladatokat.
M:
(i) $4x + 6 > 22 \to x > 4$; (ii) $x(x + 3) < 40 \to -8 < x < 5$; $4 < x < 5$

1.21. Feladat - elsőfokú és másodfokú egyenlőtlenségek alkalmazása; 12 perc

Egy téglalap alakú szoba szélessége x méter. A hossza 5 méterrrel több, mint a szélessége. Feltéve, hogy a szoba kerülete kevesebb, mint 42 méter,
(i) mutasd meg, hogy $x < 8$.
(ii) figyelembe véve, hogy az előző feltétel mel-

lett a szoba területe több, mint 50 m^2 határozd meg x lehetséges értékeit.

Tipp: Készíts ábrát. Lásd az előző feladatokat.
M:
(i) $4x + 10 < 42 \rightarrow x < 8$; (ii) $x(x + 5) > 50 \rightarrow x < -10$ vagy $5 < x$; (iii) $5 < x < 8$

1.22. Feladat - diszkrimináns; 10 perc

a) Határozd meg a $2x^2 - 4x - 3 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása nélkül.
b) Határozd meg a $x^2 + 5x + 8 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása nélkül.
c) Határozd meg a $x^2 - 6x + 9 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása nélkül.
d) Határozd meg a $2x^2 - 3x + 5 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása nélkül.
e) Határozd meg a $3x^2 - 6x + 2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása

nélkül.
f) Határozd meg az $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a számát az egyenlet megoldása nélkül.

Tipp: Lásd 1.3 itt: 2.
M:
a) $D = 40 > 0 \to$ két különböző valós gyök;
b) $D = -7 < 0 \to$ nincsen valós gyök;
c) $D = 0 \to$ egy valós gyök (két egybeeső gyök);
d) $D = -31 < 0 \to$ nincsen valós gyök;
e) $D = 12 > 0 \to$ két különböző valós gyök;
f) $D = 0 \to$ egy valós gyök (két egybeeső gyök);

1.23. Feladat - diszkrimináns; 150 perc

a) Az $x^2 - kx + 16 = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
b) Az $x^2 - 6x + k = 0$ egyenlet gyökei egyenlőek. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
c) Az $x^2 + kx + 25 = 0$ egyenlet megoldásai

megegyeznek. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

d) Az $x^2 - 12x - k = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

e) A $kx^2 + (k-6)x + k = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

f) A $(k-4)x^2 + (k+1)x + k + 4 = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

g) A $(k-4)x^2 + (2k-2)x + k + 11 = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

h) Az $x^2 + kx + 9 = 0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

i) Az $x^2 + kx + 9 = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

j) A $3x^2 - 6x - k = 0$ egyenletnek van valós gyöke (legalább egy). Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

k) A $(k-2)x^2+(3k-5)x+k+1=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
l) A $(k-2)x^2+(3k-5)x+k+1=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
m) A $(k-2)x^2+(3k-5)x+k+1=0$ egyenletnek van valós gyöke (legalább egy). Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
n) A $(k-4)x^2-(k+1)x+k+4=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
o) A $(k-4)x^2-(k+1)x+k+4=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
p) A $(k-4)x^2-(k+1)x+k+4=0$ egyenletnek van valós gyöke (legalább egy). Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
q) A $(2k-1)x^2+(3k-1)x+2-k=0$ egyenletnek

nincsenek valós gyökei. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
r) A $(2k-1)x^2+(3k-1)x+2-k=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van. Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
s) A $(2k-1)x^2+(3k-1)x+2-k=0$ egyenletnek van valós gyöke (legalább egy). Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.
t) A $2kx^2+3kx+2=x^2+x+k$ egyenletnek van valós gyöke (legalább egy). Határozd meg az egyenlet diszkriminánsát, majd k lehetséges értékeit.

Tipp: Lásd 1.3 itt: 2.
M:
a) $D=k^2-64=0 \to k=8$ vagy $k=-8$;
b) $D=36-4k=0 \to k=9$;
c) $D=k^2-100=0 \to k=10$ vagy $k=-10$;
d) $D=144+4k=0 \to k=-36$;
e) Ha $k=0$, akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 0 \to D=-3k^2-12k+36 \to$

$k = 2$ vagy $k = -6$, így k lehetséges értékei: 0, 2, -6.
f) Ha $k = 4$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 4 \rightarrow D = -3k^2 + 2k + 65 \rightarrow k = 5$ vagy $k = -\frac{13}{3}$, így k lehetséges értékei: 4, 5, $-\frac{13}{3}$.
g) Ha $k = 4$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 4 \rightarrow D = -36k + 180 \rightarrow k = 5$, így k lehetséges értékei: 4, 5.
h) $D = k^2 - 36 < 0 \rightarrow -6 < k < 6$.
i) $D = k^2 - 36 > 0 \rightarrow k < -6$ or $k > 6$.
j) $D = 36 + 12k \geq 0 \rightarrow k \geq -3$.
k) Ha $k = 2$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 2 \rightarrow D = 5k^2 - 26k + 33 < 0 \rightarrow 2.2 < k < 3$.
l) Ha $k = 2$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 2 \rightarrow D = 5k^2 - 26k + 33 > 0 \rightarrow k < 2.2$ vagy $k > 3$ és $k \neq 2$.
m) Ha $k = 2$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 2 \rightarrow D = 5k^2 - 26k + 33 \geq 0 \rightarrow k \leq 2.2$ or $k \geq 3$.
n) Ha $k = 4$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 4 \rightarrow D = -3k^2 + 2k + 65 < 0$,

így a megoldás: $k < -\frac{13}{3}$ or $k > 5$.
o) Ha $k = 4$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 4 \rightarrow D = -3k^2 + 2k + 65 > 0$, így a megoldás: $-\frac{13}{3} < k < 5$ és $k \neq 4$.
p) Ha $k = 4$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq 4 \rightarrow D = -3k^2 + 2k + 65 \geq 0$, így k lehetséges értékei: $-\frac{13}{3} \leq k \leq 5$.
q) Ha $k = \frac{1}{2}$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq \frac{1}{2} \rightarrow D = 17k^2 - 26k + 9 < 0$, így a megoldás: $\frac{9}{17} < k < 1$.
r) Ha $k = \frac{1}{2}$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq \frac{1}{2} \rightarrow D = 17k^2 - 26k + 9 > 0$, így a megoldás: $k < \frac{9}{17}$ vagy $1 < k$ és $k \neq \frac{1}{2}$.
s) Ha $k = \frac{1}{2}$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq \frac{1}{2} \rightarrow D = 17k^2 - 26k + 9 \geq 0$, így a megoldás: $k \leq \frac{9}{17}$ vagy $1 \leq k$.
t) Ha $k = \frac{1}{2}$ akkor az egyenlet elsőfokú és egy gyöke van, ha $k \neq \frac{1}{2} \rightarrow D = 17k^2 - 26k + 9 \geq 0$, így a megoldás: $k \leq \frac{9}{17}$ vagy $1 \leq k$.

1.24. Feladat - diszkrimináns; 12 perc

a) Egy alakzat egyenlete $y = (x+3)(x^2+5x+8)$. Határozd meg az $x^2 + 5x + 8 = 0$ egyenlet diszkriminánsát és így magyarázd meg, hogy az $y = (x + 3)(x^2 + 5x + 8)$ alakzat mindíg pozitív, ha $x > -3$.
b) Egy alakzat egyenlete $y = (x - 2)(-x^2 + 4x - 6)$. Hazározd meg a $-x^2 + 4x - 6 = 0$ egyenlet diszkriminánsát és így magyarázd meg, hogy az $y = (x-2)(-x^2+4x-6)$ alakzat mindíg negatív, ha $x > 2$.

M:
a) $D = -7 \to$ a másodfokú tényezőnek nincsenek zérus helyei, így mindig pozitív, másrészt $x + 3 > 0$. Két pozitív szám szorzata pozitív.
b) $D = -8 \to$ a másodfokú tényezőnek nincsenek zérus helyei, így mindig negatív (a parabola fordított), másrészt $x - 2 > 0$. Egy pozitív és egy negatív szám szorzata negatív.

1.25. Feladat - másodfokúra visszavezethető magasabbfokú egyenletek; 22 perc

a) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$
b) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x^6 + 7x^3 - 8 = 0.$
c) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$
d) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x^6 + 9x^3 + 8 = 0.$
e) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$2x^4 - x^2 - 1 = 0.$
f) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$
g) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x^4 - x^2 = 0.$
h) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$\frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^2} - 4 = 0.$
i) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$\frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^2} - 1 = 0.$
j) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit:
$x - 6\sqrt{x} + 3 = 0$; A megoldást $p \pm q\sqrt{r}$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.

k) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit: $x - 2x^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$; A megoldást $p \pm q\sqrt{r}$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
l) Határozd meg az alábbi egyenlet valós gyökeit: $(2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 - 9 = 0$.

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2.
M:
a) 1, -1, 2, -2; b) 1, -2; c) 1, -1; d) -1, -2; e) 1, -1; f) $3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; g) 0, 1, -1; h) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; i) 2, -2; j) $42 \pm 12\sqrt{6}$; k) $3 + 2\sqrt{2}$; l) 1, -2;

1.26. Feladat - egyenletrendszer megoldása behelyettesítő módszerrel; 50 perc

a) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y = x^2 - 2x + 3$ és $2x + y = 4$.
(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 - 2x + 3$ parabola és a $2x + y = 5$ egyenes helyzetéről?

b) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y = x^2 + 5x - 9$ és $3x - y = 1$.

(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 + 5x - 9$ parabola és a $3x - y = 1$ egyenes helyzetéről?

c) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y = x^2 + 4x + 5$ és $2x - y + 1 = 0$.
(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 + 4x + 5$ parabola és a $2x - y + 1 = 0$ egyenes helyzetéről?

d) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y = x^2 - 2x + 3$ és $2x + y - 3 = 0$.
(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 - 2x + 3$ parabola és a $2x + y - 3 = 0$ egyenes helyzetéről?

e) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y = x^2 - 2x + 1$ és $5x - y - 11 = 0$.
(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 - 2x + 1$ parabola és a $5x - y - 11 = 0$ egyenes helyzetéről?

f) (i) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert: $y =$

$x^2 - 5x - 6$ és $2x - 3y - 12 = 0$.
(ii) Mit állapíthatunk meg az (i) részben adott válasz alapján az $y = x^2 - 5x - 6$ parabola és a $2x - 3y - 12 = 0$ egyenes helyzetéről?

M:
a) Behelyettesítés után: $x^2 = 1 \rightarrow (1, 2), (-1, 6) \rightarrow$ két pontban metszik egymást.
b) Behelyettesítés után: $x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow (2, 5), (-4, -13) \rightarrow$ két pontban metszik egymást.
c) Behelyettesítés után: $x^2 + 2x + 4 = 0 \rightarrow x \in \emptyset \rightarrow$ nincsen közös pontjuk.
d) Behelyettesítés után: $x^2 = 0 \rightarrow (0, 3) \rightarrow$ az egyenes a parabola érintője.
e) Behelyettesítés után: $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (3, 4), (4, 9) \rightarrow$ két pontban metszik egymást.
f) Behelyettesítés után: $3x^2 - 17x - 6 = 0 \rightarrow (6, 0), (-\frac{1}{3}, -\frac{38}{9}) \rightarrow$ két pontban metszik egymást.