Matematika 11
Koordináta geometria

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár

*

2015. szeptember 27.

copyright: ©Juhász László
Ennek a könyvnek a használatát szerzői jog védi. A megvásárlásra vonatkozó információkért kérem látogasson el honlapomra.
www.bioszoft.hu

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

1. Koordináta geometria

1.1. Felező pontra vonatkozó tétel

Az $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontok M felezőpontja:
$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

1.2. Két pont távolsága

$A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontok távolsága (d):
$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ vagy
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1.3. Egyenes meredeksége (iránytényezője)

$A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontokon áthaladó egyenes meredeksége (m): $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, ahol $x_2 - x_1 \neq 0$.

1.4. Egyenes iránytényezős egyenlete

Egyenes iránytényezős egyenlete: $y - y_1 = m(x - x_1)$, ahol m az egyenes meredeksége, x és y változók, x_1 és y_1 az egyenes egy pontjának a koordinátái. (az egyenes egyenletének más formái: $y = mx + c$

vagy $ax + by + c = 0$)
Az egyenes egyenlete azt jelenti, hogy egy tetszőleges $A(p, q)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az egyenesre, ha koordinátáit az egyenes egyenletébe helyettesítve igaz kijelentést kapunk.

1.5. Merőlegesség feltétele

Két, egymásra merőleges egyenes meredekségeinek a szorzata -1 (feltéve, hogy létezik).
kulcsszavak: ellentett és reciprok

1.6. Párhuzamosság feltétele

Párhuzamos egyenesek iránytényezői (meredekségei) egyenlőek, feltéve, hogy léteznek.

1.7. Kör egyenlete

A kör egyenlete: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ahol r a kör sugara, $C(a, b)$ a kör középpontja.
Ez azt jelenti, hogy az $A(p, q)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik a körvonalra, ha koordinátái kielégítik a kör egyenletét.

1.8. Alakzatok metszéspontjának a meghatározása

Két alakzat (két egyenes, egyenes és kör, két kör, stb.) metszéspontját úgy határozhatjuk meg, hogy megoldjuk az alakzatok egyenleteiből álló egyenlet rendszert.

1.9.

Az x tengely egyenlete $y = 0$ (azon pontok vannak az x tengelyen, amelyeknek a 2. koordinátája 0).
Az y tengely egyenlete $x = 0$ (azon pontok vannak az y tengelyen, amelyeknek az 1. koordinátája 0).

1.10. Feladat - felezőpont; 10 perc

Határozd meg az AB szakasz felezőpontját!
a) $A(1,3); B(5,7)$
b) $A(2,3); B(6,9)$
c) $A(1,3); B(5,5)$
d) $A(0,3); B(4,5)$

e) $A(2,0); B(5,0)$
f) $A(-1,2); B(3,4)$
g) $A(-5,-4); B(-9,4)$
h) $A(-2,-10); B(4,-8)$
i) $A(0,-11); B(6,-1)$
j) $A(-5,-3); B(3,5)$
k) $A(-6,-2); B(-2,8)$
l) $A(1,2); B(-1,-12)$
m) $A(-12,-15); B(-18,-19)$
n) $A(3,5); B(-6,-2)$
o) $A(-2,-9); B(4,1)$
p) $A(3,6); B(-1,-2)$

Tipp: Lásd 1.1 itt: 2.
M:
a) (3, 5); b) (4, 6); c) (3, 4); d) (2, 4); e) (3.5, 0); f(1, 3); g(-7, 0); h) (1, -9); i) (3, -6); j) (-1; 1); k) (-4; 3); l) (0; -5); m) (-15; -17); n) (-1.5, 1.5); o) (1; -4); p) (1, 2)

1.11. Feladat - felezőpont; 25 perc

a) Egy szakasz két végpontja $(-3,7)$ és $(5,q)$, felező pontja pedig $(p,-1)$. Határozd meg p és

q értékét.

b) Egy szakasz két végpontja (p, q) és $(1, 3)$, felező pontja pedig $(5, 7)$. Határozd meg p és q értékét.

c) Egy szakasz két végpontja $(-2, -5)$ és $(4, q)$, felező pontja pedig $(p, -7)$. Határozd meg p és q értékét.

d) Egy szakasz két végpontja $(-4, -10)$ és $(0, 4)$, felező pontja pedig (p, q). Határozd meg p és q értékét.

e) Egy szakasz két végpontja $(p-2, q-3)$ és $(2p+5, 2q-9)$, felező pontja pedig $(3, q)$. Határozd meg p és q értékét.

f) Egy szakasz két végpontja $(-p, 3)$ és $(3p+2, q-1)$, felező pontja pedig $(1, 3q)$. Határozd meg p és q értékét.

Tipp: Lásd 1.1 itt: 2.

M:

a) $p = 1; q = -9$; b) $p = 9; q = 11$; c) $p = 1; q = -9$; d) $p = -2; q = -3$; e) $p = 1; q = 12$; f) $p = 0; q = \frac{2}{5}$;

1.12. Feladat - két pont távolsága; 30 perc

Határozd meg az AB szakasz hosszát! A megoldást $p\sqrt{q}$ alakban add meg, ahol p és q egész számok!

a) $A(1,3); B(5,7)$
b) $A(2,3); B(6,9)$
c) $A(1,3); B(5,5)$
d) $A(0,3); B(4,5)$
e) $A(2,0); B(5,0)$
f) $A(-1,2); B(3,4)$
g) $A(-5,-4); B(-9,4)$
h) $A(-2,-10); B(4,-8)$
i) $A(0,-11); B(6,-1)$
j) $A(-5,-3); B(3,5)$
k) $A(-6,-2); B(-2,8)$
l) $A(1,2); B(-1,-12)$
m) $A(-12,-15); B(-18,-19)$
n) $A(3,5); B(-6,-2)$
o) $A(-2,-9); B(4,1)$
p) $A(3,6); B(-1,-2)$

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2.
M:

a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{13}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $2\sqrt{5}$; e) 3; f) $2\sqrt{5}$; g) $4\sqrt{5}$; h) $2\sqrt{10}$; i) $2\sqrt{34}$; j) $8\sqrt{2}$; k) $2\sqrt{29}$; l) $10\sqrt{2}$; m) $2\sqrt{13}$; n) $\sqrt{130}$; o) $2\sqrt{34}$; p) $4\sqrt{5}$;

1.13. Feladat - két pont távolsága; 24 perc

a) Egy szakasz két végpontja $(1, 2)$ és $(3, p)$, hossza pedig $\sqrt{13}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
b) Egy szakasz két végpontja $(5, 10)$ és $(p, 3)$, hossza pedig $\sqrt{58}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
c) Egy szakasz két végpontja $(3, 6)$ és $(-1, p)$, hossza pedig $4\sqrt{5}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
d) Egy szakasz két végpontja $(-2, -10)$ és $(4, p)$, hossza pedig $2\sqrt{10}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
e) Egy szakasz két végpontja $(p, 3)$ és $(5, 7)$, hossza pedig $4\sqrt{2}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
f) Egy szakasz két végpontja $(1, 3)$ és $(5, p)$, hossza pedig $2\sqrt{5}$. Állapítsd meg p lehetséges értékeit.
g) Egy szakasz két végpontja $(-5, -3)$ és $(3, p)$, hossza pedig $8\sqrt{2}$. Állapítsd meg p lehetséges

értékeit.

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2.
M:
a) 5; -1; b) 2; 8; c) -2; 14; d) -12; -8; e) 1; 9; f) 1; 5; g) -11; 5

1.14. Feladat - meredekség meghatározása; 15 perc

Határozd meg az A és B pontokra illeszkedő egyenes meredekségét!
a) $A(1,3); B(5,7)$
b) $A(2,3); B(6,9)$
c) $A(1,3); B(5,5)$
d) $A(0,3); B(4,5)$
e) $A(2,0); B(5,0)$
f) $A(-1,2); B(3,4)$
g) $A(-5,-4); B(-9,4)$
h) $A(-2,-10); B(4,-8)$
i) $A(0,-11); B(6,-1)$
j) $A(-5,-3); B(3,5)$
k) $A(-6,-2); B(-2,8)$
l) $A(1,2); B(-1,-12)$

m) $A(-12,-15); B(-18,-19)$
n) $A(3,5); B(-6,-2)$
o) $A(-2,-9); B(4,1)$
p) $A(3,6); B(-1,-2)$

Tipp: Lásd 1.3 itt: 2.
M:
a) 1; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{1}{2}$; g) -2; h) $\frac{1}{3}$; i) $\frac{5}{3}$; j) 1; k) $\frac{5}{2}$; l) 7; m) $\frac{2}{3}$; n) $\frac{7}{9}$; o) $\frac{5}{3}$; p) 2

1.15. Feladat - meredekség; 20 perc

a) Az A pont koordinátái $(2,1)$, B pont koordinátái pedig $(5,k)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=3$. Határozd meg k konstans értékét.
b) Az A pont koordinátái $(-3,-5)$, B pont koordinátái pedig $(2,k-4)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=6$. Határozd meg k konstans értékét.
c) Az A pont koordinátái $(-5,4)$, B pont koordinátái pedig $(1,k+3)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=-3$. Határozd meg k konstans értékét.

d) Az A pont koordinátái $(k-1, k+3)$, B pont koordinátái pedig $(2,-5)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=4$. Határozd meg k konstans értékét.

e) Az A pont koordinátái $(2k+7,-5)$, B pont koordinátái pedig $(3, k-6)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=-2$. Határozd meg k konstans értékét.

f) Az A pont koordinátái $(-k, 4)$, B pont koordinátái pedig $(1, k+3)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=\frac{5}{6}$. Határozd meg k konstans értékét.

g) Az A pont koordinátái $(-k+4,-1)$, B pont koordinátái pedig $(-3, 2k-4)$. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége $m=\frac{2}{5}$. Határozd meg k konstans értékét.

Tipp: Lásd 1.3 itt: 2.

M:

a) $k=10$; b) $k=29$; c) $k=-17$; d) $k=\frac{20}{3}$; e) $k=-3$; f) $k=11$; g) $k=\frac{1}{8}$

1.16. Feladat - az egyenes egyenlete; 7 perc

Az e egyenes egyenlete $4x+3y=12$. Az alábbiak közül mely pontok vannak az egyenesen?
$A(3,0); B(0,4); C(2.2); D(6,-4); E(5,-2); F(1,\frac{8}{3});$

Tipp: lásd 1.4 itt 2.
M:
A, B, D, F pontok illeszkednek az egyenesre, mert koordinátáik kielégítik az egyenes egyenletét.
+Keress további pontokat az egyenesen!
+Keress az egyenes alatt és felett lévő pontokat!

1.17. Feladat - egyenes egyenlete; 14 perc

a) Az A és B pontok által meghatározott egyenes egyenlete $2x-3y=5$. $P(p,p+3)$ pont illeszkedik az AB egyenesre. Határozd meg p konstans értékét.
b) Az A és B pontok által meghatározott egyenes egyenlete $5x+2y=7$. $P(p-2,p-1)$ pont illeszkedik az AB egyenesre. Határozd meg p konstans értékét.
c) Az A és B pontok által meghatározott egye-

nes egyenlete $2x - y = 1$. $P(p+4, p-5)$ pont illeszkedik az AB egyenesre. Határozd meg p konstans értékét.
d) Az A és B pontok által meghatározott egyenes egyenlete $-2x - y = 0$. $P(p+1, p+4)$ pont illeszkedik az AB egyenesre. Határozd meg p konstans értékét.
e) Az A és B pontok által meghatározott egyenes egyenlete $x - y = 5$. $P(4, p-3)$ pont illeszkedik az AB egyenesre. Határozd meg p konstans értékét.

Tipp: lásd 1.4 itt 2.
M:
a) $p = -14$; b) $p = \frac{19}{7}$; c) $p = -12$; d) $p = -2$; d) $p = 2$;

1.18. Feladat+ egy érdekes feladat 9 perc

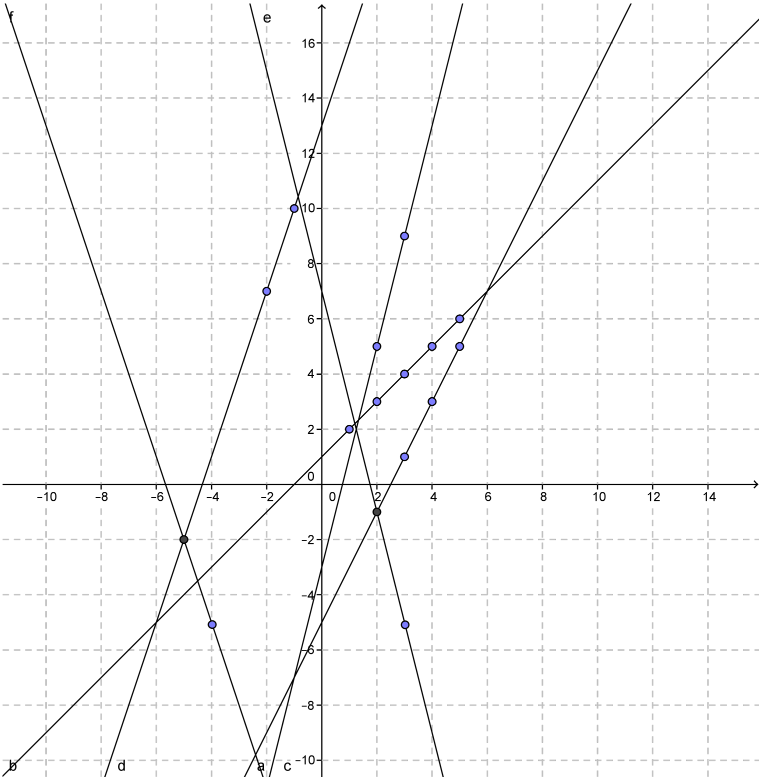
Q pont rajta van az y tengelyen, $P(6, p)$ pont pedig az x-en. PQ szakasz felezőpontja e egyenesre illeszkedik, ennek egyenlete $y = x - 1$. Határozd meg Q pont koordinátáit.

Tipp: Készíts ábrát. Vezess be ismeretleneket.
M:
$Q(0,4)$

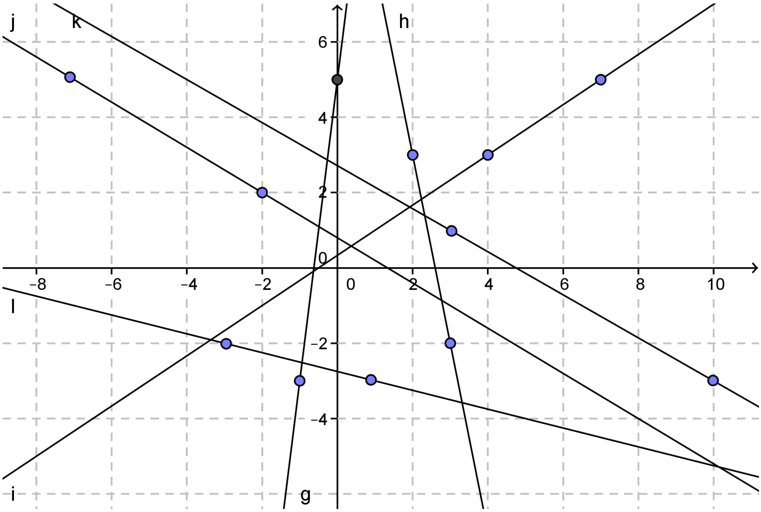
1.19. Feladat - egyenes ábrázolása; 12 perc

Az e egyenes meredeksége m, egy pontja A. Ábrázold e-t koordináta rendszerben!
a) $m=2; A(3;1)$
b) $m=1; A(1;2)$
c) $m=4; A(2;5)$
d) $m=3; A(-2;7)$
e) $m=-4; A(2;-1)$
f) $m=-3; A(-5;-2)$
g) $m=8; A(-1;-3)$
h) $m=-5; A(2;3)$
i) $m=\frac{2}{3}; A(4;3)$
j) $m=-\frac{3}{5}; A(-7;5)$
k) $m=-\frac{4}{7}; A(3;1)$
l) $m=-\frac{1}{4}; A(-3;-2)$

Tipp: Két pont szükséges.



M(a-f):



M(g-l):

1.20. Feladat - egyenes egyenlete; 25 perc

Az e egyenes meredeksége m, egy pontja A. Határozd meg az e egyenes egyenletét. A megoldást hozd $ax + by + c = 0$ alakra, ahol a, b, c egész számok!

a) $m = 2; A(3; 1)$

b) $m = 1; A(1; 2)$

c) $m = 4; A(2; 5)$

d) $m = 3; A(-2; 7)$

e) $m = -4; A(2; -1)$

f) $m=-3; A(-5;-2)$
g) $m=8; A(-1;-3)$
h) $m=-5; A(2;3)$
i) $m=\frac{2}{3}; A(4;3)$
j) $m=-\frac{3}{5}; A(-7;5)$
k) $m=-\frac{4}{7}; A(3;1)$
l) $m=-\frac{1}{4}; A(-3;-2)$

Tipp: Lásd 1.4 itt: 2.
M:
a) $2x-y-5=0$; b) $x-y+1=0$; c) $4x-y-3=0$; d) $3x-y+13=0$; e) $4x+y-7=0$; f) $3x+y+17=0$; g) $8x-y+5=0$; h) $5x+y-13=0$; i) $2x-3y+1=0$; j) $3x+5y-4=0$; k) $4x+7y-19=0$; l) $x+4y+11=0$;

1.21. Feladat - egyenes egyenlete; 24 perc

Az e egyenes meredeksége m, egy pontja A. Határozd meg az e egyenes egyenletét. A megoldást hozd $y=ax+b$ alakra, ahol a, b racionális számok!
a) $m=2; A(3;1)$
b) $m=1; A(1;2)$
c) $m=4; A(2;5)$

d) $m = 3; A(-2; 7)$
e) $m = -4; A(2; -1)$
f) $m = -3; A(-5; -2)$
g) $m = 8; A(-1; -3)$
h) $m = -5; A(2; 3)$
i) $m = \frac{2}{3}; A(4; 3)$
j) $m = -\frac{3}{5}; A(-7; 5)$
k) $m = -\frac{4}{7}; A(3; 1)$
l) $m = -\frac{1}{4}; A(-3; -2)$

Tipp: Használd fel az előző feladat megoldásait vagy lásd 1.4 itt: 2.
M:
a) $y = 2x - 5$; b) $y = x + 1$; c) $y = 4x - 3$; d) $y = 3x + 13$; e) $y = -4x + 7$; f) $y = -3x - 17$; g) $y = 8x + 5$; h) $y = -5x + 13$; i) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$; j) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$; k) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{19}{7}$; l) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$;

1.22. Feladat - egyenes egyenlete; 1 perc

a) Az e egyenes egyenlete $y = 2x - 1$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
b) Az e egyenes egyenlete $y = x + 5$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.

c) Az e egyenes egyenlete $y = -4x$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
d) Az e egyenes egyenlete $y = -x - 2$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
e) Az e egyenes egyenlete $y = 3$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
f) Az e egyenes egyenlete $y = \frac{2}{3}x + 3$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.

Tipp: Az iránytangens megegyezik az x együtthatójával.
M:
a) $m = 2$; b) $m = 1$; c) $m = -4$; d) $m = -1$; e) $m = 0$; f) $m = \frac{2}{3}$;

1.23. Feladat - egyenes egyenlete; 6 perc

a) Az e egyenes egyenlete $2x - 5y = 1$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
b) Az e egyenes egyenlete $3x + 2y = 7$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
c) Az e egyenes egyenlete $x + y = 1$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.

d) Az e egyenes egyenlete $2y = 7$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.
e) Az e egyenes egyenlete $3x = 5$. Állapítsd meg e egyenes iránytangensét.

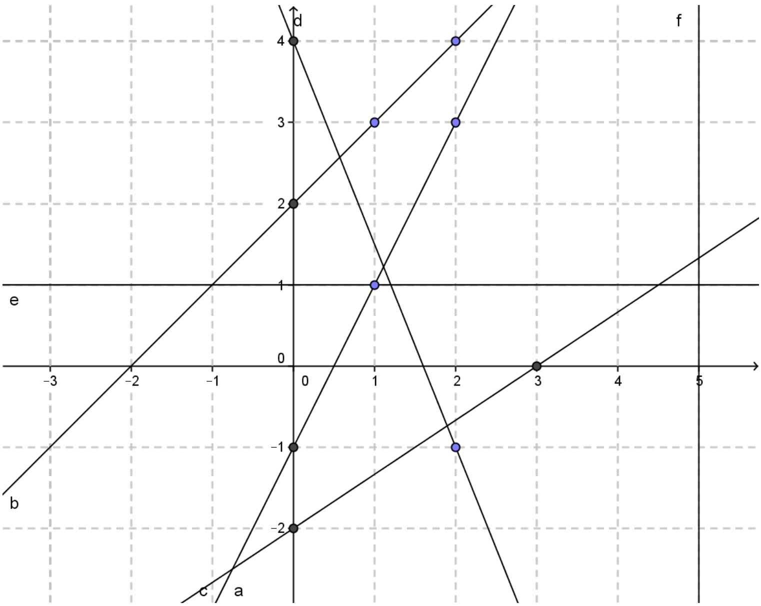
Tipp: Fejezd ki y-t és ekkor az iránytangens megegyezik x együtthatójával.
M:
a) $m = \frac{2}{5}$; b) $m = -\frac{3}{2}$; c) $m = -1$; d) $m = 0$; e) m nem létezik, az egyenes párhuzamos az x tengellyel;

1.24. Feladat - egyenes ábrázolása; 12 perc

a) Az a egyenes egyenlete $2x - y = 1$. Ábrázold a grafikonját koordináta rendszerben.
b) A b egyenes egyenlete $x - y = -2$. Ábrázold b grafikonját koordináta rendszerben.
c) A c egyenes egyenlete $2x - 3y = 6$. Ábrázold c grafikonját koordináta rendszerben.
d) A d egyenes egyenlete $5x + 2y = 8$. Ábrázold d grafikonját koordináta rendszerben.
e) Az e egyenes egyenlete $y = 1$. Ábrázold e

grafikonját koordináta rendszerben.
f) Az f egyenes egyenlete $2x = 10$. Ábrázold f grafikonját koordináta rendszerben.

Tipp: Alakítsd át az egyenletet $y = mx + b$ alakra. Innen kiolvasható a meredekség és egy pont: $(0, b)$
M:
a) $y = 2x - 1 \Rightarrow a \cap y = (0, -1); m = 2;$
b) $y = x + 2 \Rightarrow b \cap y = (0, 2); m = 1;$
c) $y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow c \cap y = (0, -2); m = \frac{2}{3};$
d) $y = -\frac{5}{2}x + 4 \Rightarrow d \cap y = (0, 4); m = -\frac{5}{2};$
e) $y = 1 \Rightarrow e \cap y = (0, 1); m = 0;$
f) $x = 5 \Rightarrow f \cap x = (5, 0); m$ nem létezik, de f párhuzamos az y tengellyel.



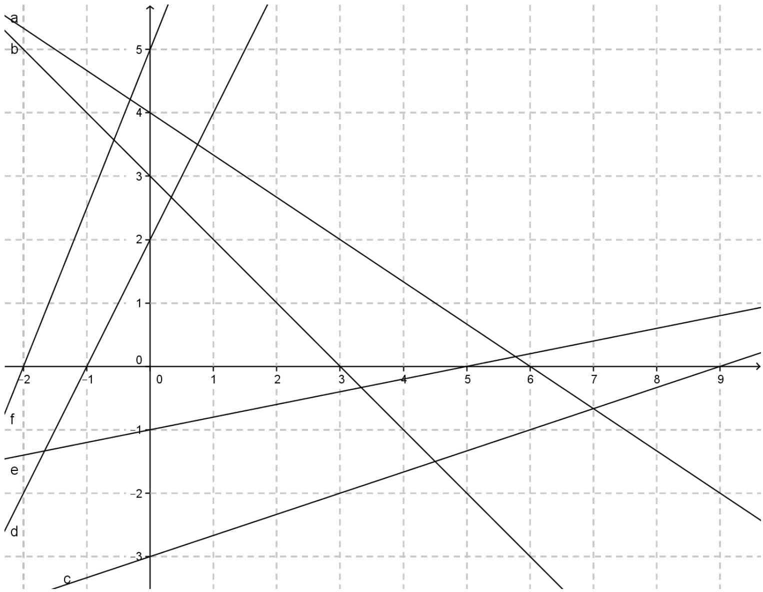
1.25. Feladat - egyenes ábrázolása; 12 perc

a) Ábrázold $a : 2x + 3y = 12$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontjait.
b) Ábrázold $a : x + y = 3$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontja
c) Ábrázold $a : x - 3y = 9$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontja

d) Ábrázold $a : 2x - y = -2$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontjait.
e) Ábrázold $a : x - 5y = 5$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontja
f) Ábrázold $a : 5x - 2y = -10$ egyenest koordináta rendszerben, felhasználva a tengelyekkel vett metszéspontjait.

Tipp: Nullát helyettesítve x helyére, megkapjuk az egyenes y tengellyel vett metszéspontját, nullát helyettesítve y helyére, az x tengellyel vett metszéspontot kapjuk meg.
M:
a) (6, 0); (0, 4); b) (3, 0); (0, 3); c) (9, 0); (0, -3); d) (-1, 0); (0, 2); e) (5, 0); (0, -1); f) (-2, 0); (0,

5);



1.26. Feladat - háromszög területe; 3 perc

Határozd meg az előző feladat eredménye alapján az (a, x, y) egyenesek által meghatározott háromszög területét.

Tipp: Egy derékszögű háromszög területe $\frac{ab}{2}$, ahol a és b a háromszög befogói.
M:

a) 12; b) 4.5; c) 13.5; d) 1; e) 2.5; f) 5;

1.27. Feladat - egyenesek metszéspontja; 36 perc

a) Egy egyenes egyenlete $2x + 3y = 11$, egy másiké $5x+4y = 17$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
b) Egy egyenes egyenlete $5x + 2y = -16$, egy másiké $3x+7y = 2$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
c) Egy egyenes egyenlete $8x-3y = 9$, egy másiké $5x+2y = -6$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
d) Egy egyenes egyenlete $3x + 4y = -19$, egy másiké $x-6y = 1$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
e) Egy egyenes egyenlete $5x-7y = 0$, egy másiké $8x - 3y = 0$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
f) Egy egyenes egyenlete $-7x - 3y = -7$, egy másiké $-5x-2y = -4$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.
g) Egy egyenes egyenlete $2x-3y = 5$, egy másiké $-4x + 6y = -13$, metszéspontjuk C. Állapítsd

meg C koordinátáit.
h) Egy egyenes egyenlete $5x+6y=7$, egy másiké $25x+30y=35$, metszéspontjuk C. Állapítsd meg C koordinátáit.

Tipp: Lásd 1.8 itt: 4.
M:
a) $C(1,3)$; b) $C(-4,2)$; c) $C(0,-3)$; d) $C(-5,-1)$; e) $C(0,0)$; f) $C(-2,7)$; g) Nincsen metszéspont. $(x,y\in\emptyset)$, a két egyenes párhuzamos egymással; h) A megoldások száma végtelen, a két egyenes egybeesik.

1.28. Feladat - merőleges egyenesek; 6 perc

Az e egyenes meredeksége m_e. f egyenes merőleges az e-re. Állapítsd meg f iránytangensét.
a) $m_e=3$; b) $m_e=10$; c) $m_e=1$; d) $m_e=-2$; e) $m_e=-5$; f) $m_e=-8$; g) $m_e=\frac{1}{3}$; h) $m_e=\frac{2}{5}$; i) $m_e=-\frac{1}{8}$; j) $m_e=-\frac{1}{2}$; k) $m_e=-1$; l) $m_e=-\frac{7}{2}$; m) $m_e=0$;

Tipp: Lásd 1.5 itt: 3.
M:

a) $m_f = -\frac{1}{3}$; b) $m_f = -\frac{1}{10}$; c) $m_f = -1$; d) $m_f = \frac{1}{2}$; e) $m_f = \frac{1}{5}$; f) $m_f = \frac{1}{8}$; g) $m_f = -3$; h) $m_f = -\frac{5}{2}$; i) $m_f = 8$; j) $m_f = 2$; k) $m_f = 1$; l) $m_f = \frac{2}{7}$; m) Nincsen megoldás (A nullának nem létezik a reciproka.);

1.29. Feladat - merőleges egyenesek; 25 perc

a) Az e egyenes egyenlete $y = 2x - 3$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(1, 2)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px + qy + r = 0$ alakban, ahol p, q, r egész számok.
b) Az e egyenes egyenlete $2x - y - 3 = 0$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(1, 2)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px + qy + r = 0$ alakban, ahol p, q, r egész számok.
c) Az e egyenes egyenlete $x - 2y + 7 = 0$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(-3, 4)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px+qy+r = 0$ alakban, ahol p, q, r egész számok.
d) Az e egyenes egyenlete $5x + 2y - 8 = 0$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(2, -6)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px+qy+r =$

0 alakban, ahol p, q, r egész számok.
e) Az e egyenes egyenlete $x - 4y + 12 = 0$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(0, -1)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px+qy+r = 0$ alakban, ahol p, q, r egész számok.
f) Az e egyenes egyenlete $6x + 3y - 1 = 0$. Az f egyenes merőleges e-re és átmegy az $A(-5, 0)$ ponton. Határozd meg f egyenletét $px+qy+r = 0$ alakban, ahol p, q, r egész számok.

Tipp: Határozd meg m_e-t (lásd Feladat 1.23 itt: 17), aztán m_f-t (lásd az előző feladatot), aztán f egyenletét (lásd 1.4 itt: 2).
M:
a) $x+2y-5 = 0$; b) $x+2y-5 = 0$; c) $2x+y+2 = 0$; d) $2x - 5y - 34 = 0$; e) $4x + y + 1 = 0$; f) $x - 2y + 5 = 0$;

1.30. Feladat - párhuzamos egyenesek; 25 perc

a) Az e egyenes egyenlete $y = 3x - 1$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(-3, 5)$ ponton. A választ $px + qy + r = 0$ alakban add meg, ahol

p, q, r egész számok.
b) Az e egyenes egyenlete $5x-y-4=0$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(2,-4)$ ponton. A választ $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
c) Az e egyenes egyenlete $x-3y+6=0$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(2,5)$ ponton. A választ $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
d) Az e egyenes egyenlete $6x+5y-7=0$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(3,-7)$ ponton. A választ $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
e) Az e egyenes egyenlete $x-5y-9=0$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(-3,0)$ ponton. A választ $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
f) Az e egyenes egyenlete $4x+2y-3=0$. Határozd meg annak az f egyenesnek az egyen-

letét, amely párhuzamos e-vel és átmegy az $A(0, -7)$ ponton. A választ $px + qy + r = 0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.

Tipp: Határozd meg m_e-t (Lásd Feladat 1.23 itt: 17), aztán m_f-t (Lásd 1.6 itt: 3), aztán f egyenletét (Lásd 1.4 itt: 2).
M:
a) $x + 3y - 12 = 0$; b) $x + 5y + 18 = 0$; c) $3x + y - 11 = 0$; d) $5x - 6y - 57 = 0$; e) $5x + y + 15 = 0$; f) $x - 2y - 14 = 0$;

1.31. Feladat - egyenes egyenlete, két pont távolsága; 45 perc

a) Az e egyenes meredeksége -2 és áthalad az $A(1; 5)$ ponton. B pont rajta van az e egyenesen és az AB távolság $4\sqrt{5}$. Határozd meg minden, a feltételeknek megfelelő B pont koordinátáit.
b) Az e egyenes meredeksége 3 és áthalad az $A(1; 2)$ ponton. B pont rajta van az e egyenesen és az AB távolság $\sqrt{10}$. Határozd meg minden, a feltételeknek megfelelő B pont koordinátáit.
c) Az e egyenes meredeksége 1 és áthalad az

$A(-3;-1)$ ponton. B pont rajta van az e egyenesen és az AB távolság $4\sqrt{2}$. Határozd meg minden, a feltételeknek megfelelő B pont koordinátáit.

Tipp1: Keressük $B(p,q)$ pontot. Két ismeretlenünk van, így két egyenlet szükséges.
Tipp2: Határozd meg e egyenletét. B koordinátái kielégítik e egyenletét. Lásd 1.2 itt: 2.
M:
a) $e: q=-2p+7; \sqrt{(p-1)^2+(q-5)^2}=4\sqrt{5} \rightarrow p^2-2p-15=0 \rightarrow B(5,-3)$ or $B(-3,13)$;
b) $e: q=3p-1; \sqrt{(p-1)^2+(q-2)^2}=\sqrt{10} \rightarrow p^2-2p=0 \rightarrow B(0,-1)$ or $B(2,5)$;
c) $e: q=p+2; \sqrt{(p+3)^2+(q+1)^2}=4\sqrt{2} \rightarrow p^2+6p-7=0 \rightarrow B(1,3)$ or $B(-7,-5)$;

1.32. Feladat+ 12 perc

Adott két pont: $A(3,2)$ és $B(12,1)$. Határozd meg az x tengelyen azt a pontot, melyre az $AP+PB$ érték minimális.

Tipp1: Készíts ábrát. Változtasd meg a feltételeket.
Tipp2: Tükrözd A-t.
M:
$A'(3,-2), m=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}x-3, p=9$

1.33. Feladat+ 12 perc

Adott két pont: $A(3,-5)$ és $B(1,3)$. Határozd meg az y tengelyen azt a pontot, melyre az $AP+PB$ érték minimális.

Tipp1: Készíts ábrát. Változtasd meg a feltételeket.
Tipp2: Tükrözd A-t.
M:
$A'(-3,-5), m=2, y=2x+1, p=1$

1.34. Feladat+ 12 perc

Adott két pont: $A(6,1)$ és $B(2,7)$. Határozd meg az y tengelyen azt a pontot, amelynek a távolsága A-tól és B-től megegyezik.

Tipp1: Készíts ábrát. Próbálgass. Keress néhány megfelelő pontot.
Tipp2: Írd fel a felezőmerőleges egyenletét, majd annak az y tengellyel vett metszéspontját.
M:
A és B felezőpontja $F(4,4), m = \frac{2}{3}, 2x-3y+4 = 0, p = 0, q = \frac{4}{3};$

1.35. Feladat+ 7 perc

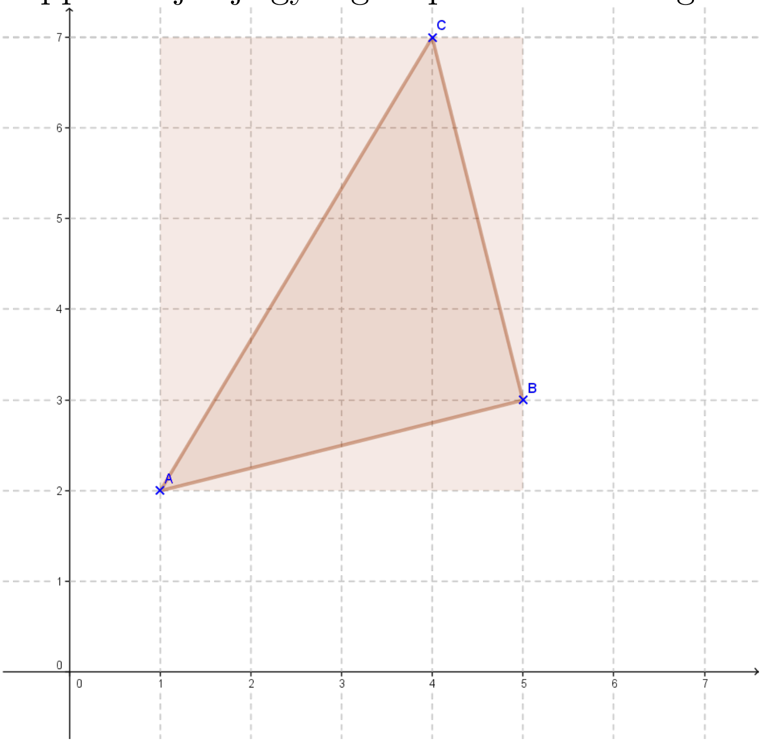
Az $A(p,0)$ és $B(q,r)$ pontok felezőpontja $F(11,6)$. Az e egyenes egyenlete: $3x - 2y = 0$. B pont rajta van az e egyenesen. Határozd meg p, q és r számokat.

Tipp: Készíts ábrát. Először határozd meg r-t, aztán q-t és végül p-t.
M:
$r = 12, q = 8, p = 14$

1.36. Feladat háromszög területe 7 perc

Adott hátom pont: $A(1,2); B(5,3); C(4,7)$. Határozd meg az ABC háromszög területét.

Tipp1: Készíts ábrát.
Tipp2: Rajzolj egy téglalapot a háromszög köré.



M:

$T = 4 \cdot 5 - (\frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{5 \cdot 3}{2}) = 8,5$

1.37. Feladat - kör egyenlete; 6 perc

a) Egy kör egyenlete $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. Igazold, hogy az $A(6,4)$ pont rajta van a körön.
b) Egy kör egyenlete $x^2 + (y+3)^2 = 52$. Igazold, hogy az $A(6,1)$ pont rajta van a körön.
c) Egy kör egyenlete $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 34$. Igazold, hogy az $A(-1,-6)$ pont rajta van a körön.
d) Egy kör egyenlete $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 25$. Igazold, hogy az $A(-8,-6)$ pont rajta van a körön.
e) Egy kör egyenlete $(x+7)^2 + (y-6)^2 = 1$. Igazold, hogy az $A(-7,5)$ pont rajta van a körön.

Tipp: Lásd 1.7 itt: 3.
M:
a) $(6-2)^2 + (4-1)^2 = 25$ igaz.
b) $6^2 + (1+3)^2 = 52$ igaz.
c) $(-1-4)^2 + (-6+3)^2 = 34$ igaz.
d) $(-8+5)^2 + (-6+2)^2 = 25$ igaz.
e) $(-7+7)^2 + (5-6)^2 = 1$ igaz.

1.38. Feladat - kör egyenlete; 4 perc

Adott egy kör az egyenletével. Határozd meg a kör C középpontjának a koordinátáit és a sugarát.
a) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$
b) $(x+3)^2+(y-5)^2=9$
c) $(x+1)^2+y^2=3$
d) $x^2+y^2=49$
e) $(x+8)^2+(y-4)^2=81$

Tipp: Lásd 1.7 itt: 3.
M:
a) $C(2,1); r=5$; b) $C(-3,5); r=3$; c) $C(-1,0); r=\sqrt{3}$; d) $C(0,0); r=7$; e) $C(-8,4); r=9$;

1.39. Feladat - kör egyenlete; 36 perc

Adott egy kör az egyenletével. Határozd meg a kör C középpontjának a koordinátáit és a sugarát.
a) $x^2+y^2+2x-4y-11=0$
b) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$
c) $x^2+y^2+8y-9=0$

d) $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x = 0$
f) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
g) $x^2 + y^2 - 20x - 20y - 200 = 0$
h) $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 18 = 0$
i) $x^2 + y^2 - 5 = 0$
j) $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 4 = 0$
k) $x^2 + y^2 + 3x + y - 1.5 = 0$

Tipp: Lásd 1.7 itt: 3.
Kulcsszavak: fél mínusz négyzet
M:
a) $C(-1, 2); r = 4$; b) $C(5, 3); r = 6$; c) $C(0, -4); r = 5$; d) $C(6, 7); r = 9$; e) $C(-1, 0); r = 1$; f) $C(2, -3); r = 3$; g) $C(10, 10); r = 20$; h) $C(9, 1); r = 8$; i) $C(0, 0); r = \sqrt{5}$; j) $C(-3, -6); r = 7$; k) $C(-1.5, -0.5); r = 2$;

1.40. Feladat - kör egyenlete; 18 perc

Az AB szakasz a kör egyik átmérője. Add meg a kör egyenletét.
a) $A(1, 2), B(3, 8)$; b) $A(-3, 7), B(5, 1)$; c) $A(-2, -10), B(-$
d) $A(-5, 3), B(5, -3)$; e) $A(2, -3), B(-6, 7)$;

Tipp: Lásd 1.1 itt: 2 és 1.2 itt: 2 és 1.7 itt: 3.

M:

a) $C(2,5), r=\sqrt{10}, (x-2)^2+(y-5)^2=10$

b) $C(1,4), r=5, (x-1)^2+(y-4)^2=25$

c) $C(-4,-7), r=\sqrt{13}, (x+4)^2+(y+7)^2=13$

d) $C(0,0), r=\sqrt{34}, x^2+y^2=34$

e) $C(-2,2), r=\sqrt{41}, (x+2)^2+(y-2)^2=41$

1.41. Feladat - kör egyenlete; 6 perc

a) Egy kör középpontja $C(4,3)$ és érinti az y tengelyt. Add meg a kör egyenletét $(x \pm p)^2 + (y \pm q)^2 = r$ alakban.

b) Egy kör középpontja $C(-5,-2)$ és érinti az x tengelyt. Add meg a kör egyenletét $(x \pm p)^2 + (y \pm q)^2 = r$ alakban.

Tipp: Készíts ábrát. Lásd 1.7 itt: 3.

M:

a) $(x-4)^2+(y-3)^2=16$; b) $(x+5)^2+(y+2)^2=4$

1.42. Feladat - egyenes és kör metszéspontja; 18 perc

a) Határozd meg az $(x-5)^2+(y+3)^2=18$ egyenletű kör és az x tengely metszéspontjának a koordinátáit.
b) Határozd meg az $(x+3)^2+(y+1)^2=25$ egyenletű kör és az y tengely metszéspontjának a koordinátáit.
c) Határozd meg az $(x-4)^2+y^2=9$ egyenletű kör és az x tengely metszéspontjának a koordinátáit.
d) Határozd meg az $(x+5)^2+(y+6)^2=29$ egyenletű kör és az y tengely metszéspontjának a koordinátáit.
+Ábrázold a kört és ellenőrizd a megoldást.

Tipp: Lásd 1.9 itt: 4 és 1.8 itt: 4.
M:
a) behelyettesítés után: $x^2-10x+16=0 \rightarrow (2,0),(8,0)$;
b) behelyettesítés után: $y^2+2y-15=0 \rightarrow (0,-5),(0,3)$;
c) behelyettesítés után: $x^2-8x+7=0 \rightarrow$

$(1,0),(7,0)$;
d) behelyettesítés után: $y^2+12y+32=0 \rightarrow (0,-4),(0,-8)$;

1.43. Feladat - kör és egyenes metszéspontja; 45 perc

a) Határozd meg az $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ egyenletű kör és az $3x-y=2$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit.
b) Határozd meg az $(x+2)^2+(y-3)^2=10$ egyenletű kör és az $x-2y+1=0$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit.
c) Határozd meg az $x^2+(y-1)^2=8$ egyenletű kör és az $x+y=1$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit.
d) Határozd meg az $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ egyenletű kör és az $x+2y+1=0$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit.
e) Határozd meg az $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ egyenletű kör és az $3x+y+3=0$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit.
+Ábrázold a kört és az egyenest és így ellenőrizd

a megoldást.

Tipp: Lásd 1.8 itt: 4.
M:
a) behelyettesítés után: $5x^2 - 3x - 14 = 0 \rightarrow (2,4),(1,1)$;
b) behelyettesítés után: $5y^2 - 2y = 0 \rightarrow (-1,0),(-0.2,0.4)$;
c) behelyettesítés után: $y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow (-2,3),(2,-1)$;
d) behelyettesítés után: $y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow (1,-1)$;
e) behelyettesítés után: $5x^2 + 17x + 14 = 0 \rightarrow (-2,3),(-1.4,1.2)$;

1.44. Feladat - kör érintője; 18 perc

a) Egy kör középpontja $C(2,5)$, sugara 5. Határozd meg annak az egyenesnek (t) az egyenletét, amely a kört a $P(5,9)$ pontban érinti. A megoldást $px + qy + r = 0$ alakban add meg, ahol p, q, r egész számok.
b) Egy kör egyenlete: $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 85$. Határozd meg annak az egyenesnek (t) az egyen-

letét, amely a kört a $P(-3,-2)$ pontban érinti. A megoldást $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p,q,r egész számok.
c) Egy kör egyenlete: $x^2+2x+y^2-8y=35$. Határozd meg annak az egyenesnek (t) az egyenletét, amely a kört a $P(3,-2)$ pontban érinti. A megoldást $px+qy+r=0$ alakban add meg, ahol p,q,r egész számok.

Tipp: Egy pont és egy iránytanges szükséges az egyenlet megadásához. Készíts ábrát. Lásd 1.3 itt: 2 és 1.4 itt: 2 és 1.5 itt: 3.
M:
a) $m_{CP}=\frac{4}{3}\rightarrow m_t=-\frac{3}{4}\rightarrow 3x+4y-51=0$
b) $m_{CP}=\frac{9}{2}\rightarrow m_t=-\frac{2}{9}\rightarrow 2x+9y+24=0$
c) $m_{CP}=-\frac{3}{2}\rightarrow m_t=\frac{2}{3}\rightarrow 2x-3y-12=0$

1.45. Feladat - a körvonalra merőleges egyenes; 15 perc

a) Egy kör középpontja $C(3,4)$, sugara 5. Határozd meg annak az egyenesnek (n) az egyenletét, amely a kört a $P(-1,1)$ pontban merőlegesen metszi.

A választ $px + qy + r = 0$ formában add meg, ahol p, q, r egész számok.
b) Egy kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 52$. Határozd meg annak az egyenesnek (n) az egyenletét, amely a kört a $P(-2, 1)$ pontban merőlegesen metszi. A választ $px + qy + r = 0$ formában add meg, ahol p, q, r egész számok.
c) Egy kör egyenlete: $x^2 + 4x + y^2 - 10y = -11$. Határozd meg annak az egyenesnek (n) az egyenletét, amely a kört a $P(1, 8)$ pontban merőlegesen metszi. A választ $px + qy + r = 0$ formában add meg, ahol p, q, r egész számok.

Tipp: Az egyenlethez egy pont és a meredekség szükséges. Készíts ábrát. Lásd 1.3 itt: 2 és 1.4 itt: 2.
M:
a) $m_n = \frac{3}{4} \to 3x - 4y + 7 = 0$
b) $m_n = \frac{2}{3} \to 2x - 3y + 7 = 0$
c) $m_n = 1 \to x - y + 7 = 0$

1.46. Feladat - kör; 20 perc

Egy kör középpontja $C(-5,3)$ és sugara 5.
(i) Határozd meg a kör egyenletét $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alakban, ahol a,b,c egész számok.
(ii) Igazold, hogy a $P(-1,6)$ pontba húzott érintő egyenlete $4x+3y-14=0$.
(iii) Bizonyítsd be, hogy a $T(8,-6)$ pont rajta van ezen érintőn.
(iv) Számítsd ki CPT háromszög területét.

Tipp: Lásd 1.7 itt: 3 és 1.3 itt: 2 és 1.5 itt: 3 és 1.4 itt: 2.
M:
(i) $x^2+y^2-10x+6y+9=0$.
(ii) $m_{CP}=\frac{3}{4} \to m=-\frac{4}{3} \to 4x+3y-14=0$
(iii) $4\cdot 8+3\cdot(-6)-14=0$ is true.
(iv) $PC=r=5; PT=\sqrt{81+144}=15$; area$=\frac{5\cdot 15}{2}=37.5$

1.47. Feladat - kör; 12 perc

Egy kör egyenlete $(x-3)^2+(y-1)^2=20$. C a kör középpontja, P és Q pontok illeszkednek a körvonalra, PQ szakasz felezőpontja pedig $M(6,2)$.
(i) Számold ki, hogy milyen távol van C a PQ szakasztól.
(ii) Határozd meg PCQ háromszög területét.
(iii) Határozd meg P és Q pontok koordinátáit.

M:
(i) $CM=\sqrt{10}$; (ii) $MP=\sqrt{10}\rightarrow A_{PQC}=\frac{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=10$
(iii) PQ-ra illeszkedő egyenes egyenlete: $y=-3x+20\rightarrow P(5,5);Q(7,-1)$

1.48. Feladat - kör; 12 perc

Egy kör egyenlete: $(x+4)^2+(y-1)^2=16$.
(i) Határozd meg a kör C középpontjának a koordinátáit és az átmérő hosszát.
(ii) Határozd meg a C pont és a $P(-2,-3)$ pont-

nak a távolságát és ennek alapján döntsd el, hogy P a körvonalon belül vagy kívül helyezkedik-e el.
(iii) Határozd meg algebrai úton, hogy az $y = 2x - 3$ egyenletű egyenesnek a körrel mennyi metszéspontja van.

M:
(i) $C(-4, 1), d = 8$; (ii) $PC = \sqrt{20} > 4 \rightarrow P$ a körön kívül fekszik.
(iii) Behelyettesítés után: $5x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow D = 64 - 320 = -256 < 0 \rightarrow$ a közös pontok száma 0.

1.49. GPS - Globális helymeghatározó rendszer (Global Positioning System)

A GPS alapötlete (lásd wikipédia)
A GPS vevő magasan a Föld felett keringő műholdakról érkező jelekből számítja ki az aktuális pozíciót. Mindegyik műhold folyamatosan sugároz a Földre. Az üzenet az alábbi információkat tartalmazza:
-a pontos időt, amikor az üzenet elküldésre került
-a műhold aktuális pozícióját az üzenet elküldésének

időpontjában
A vevő tartalmaz egy viszonylag pontos órát (ezt folyamatosan korrigálják, ezért kell a negyedik műhold), az üzenet beérkezésekor az időeltérésből következtetni lehet a vevő és a műhold távolságára ($r = c{\cdot}\Delta t$, ahol c a fénysebesség, a rádió hullámok ezzel a sebességgel terjednek, Δt pedig az üzenetben lévő időpont és az üzenet érkezésekor a vevő idejének a különbsége). Így három gömbfelületet kapunk (a gömb azon pontok mértani helye a térben, amelyek adott ponttól adott távolságra vannak), ahol a vevő elhelyezkedhet, ezek metszete általános esetben két pont (két gömbfelület metszete körvonal, ennek a harmadik gömbbel két metszéspontja van). Kihasználva, hogy valahol a Föld felületének a közelében vagyunk adódik a pontos koordinátánk.

1.50. Feladat+ - bevezető feladat a GPS működéséhez (érdemes számológépet használni); 25 perc

Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:
I: $(x-8)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 68$

II: $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 42$
III: $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 182$

Tipp: Képezd I.-II. és I.-III. egyenleteket és aztán fejezd ki x-t és z-t y-nal. A kapott egyenleteket helyettesítsd be az I. II. vagy a III. egyenletbe.
M:
(2, 5, 8) vagy (3.28, 7.74, 3.43)

1.51. Feladat+ GPS működése; 15 perc

Van egy koordináta rendszerünk három koordinátával: x, y, z. Határozd meg a P pont koordinátáit az alábbi feltételek alapján:
-P távolsága az origótól 9.5 km és 10 km között van
-P-ben van egy óra, ami 14:25:32.35 időt mutat
-S1 műholdról ebben a pillanatban érkezik egy üzenet: (8, 1, 4); 14:25:32.3499725, ami a műhold koordinátáit tartalmazza a jel elküldésének időpontjában
-S2 műholdról is érkezik egy üzenet: (-2, 4, 3); 14:25:32.3499784
-S3 műholdról is: (3, -5, -1); 14:25:32.349955

-a koordináták kilométert jelentenek
-a fénysebesség 300 000 km/s
-feltételezzük, hogy a P-ben lévő óra pontos
Tipp: $r_1 = c \cdot \Delta t$, etc.
M:
(2, 5, 8)