

Matematika fakultáció

Integrálszámítás

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár



2015. szeptember 27.

copyright: ©Juhász László
Ennek a könyvnek a használatát szerzői jog
védi. A megvásárlásra vonatkozó
információkért kérem látogasson el honlapomra.
www.bioszoft.hu

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

1. Integrálszámítás

1.1. Definíció - határozatlan integrál

Ha $F'(x) = f(x)$ akkor $F(x) + c = \int f(x) dx$.

1.2. Tétel - polinom integrálja

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c, \text{ ahol } n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$$

megjegyzés: $\int a dx = ax + c$

1.3. Tétel - összeg határozatlan integrálja

Ha $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$ akkor $\int(f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$.

1.4. Tétel - határozott integrál

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

1.5. Tétel - görbe alatti terület

Az $y = f(x)$ görbe alatti terület: $= \int_a^b f(x) dx$,
ahol $y \geq 0$.

Az $y = f(x)$ görbe feletti terület: $= \int_a^b (-f(x)) dx$, ahol $y \leq 0$.

1.6. Tétel - területképletek

trapéz területe: $\frac{a+c}{2}m$

téglalap területe: $a \cdot b$

háromszög területe: $\frac{a \cdot m}{2}$

derékszögű háromszög területe: $\frac{ab}{2}$, ahol a és b a befogók.

1.7. Feladat - polinom határozatlan integrálja 18 perc

Számold ki az alábbi határozatlan integrálokat. Ahol lehet, ott egyszerűsíts!

- a) $\int 2x^2 dx$; b) $\int 3 dx$; c) $\int 2x dx$; d) $\int 3x^4 dx$;
e) $\int 2x^5 dx$; f) $\int (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) dx$; g) $\int (x^3 - 2x^2 + 7x - 1) dx$; h) $\int (8x^3 - 6x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}) dx$;
i) $\int (12x^3 - 9x^2 + 2x - \frac{x^2}{\sqrt{x^7}} - \frac{4}{x^3}) dx$;

Tipp: Lásd 1.2 itt: 2 és 1.3 itt: 2.

M:

- a) $\frac{2}{3}x^3 + c$; b) $3x + c$; c) $x^2 + c$; d) $\frac{3}{5}x^5 + c$; e)

$\frac{1}{3}x^6 + c$; f) $\frac{1}{2}x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x + c$; g) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + c$; h) $2x^4 - 2x^3 - 6\sqrt{x} + \frac{1}{x} + c$;
 i) $3x^4 - 3x^3 + x^2 + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + c$

1.8. Feladat - határozott integrál; 20 perc

Számítsd ki:

a) $\int_0^2 3 dx$; b) $\int_0^4 x dx$; c) $\int_{-2}^5 2 dx$; d) $\int_{-1}^4 (x+3) dx$;
 e) $\int_0^1 x^2 dx$; f) $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx$; g) $\int_0^3 (2x^2 - 8x + 8) dx$;
 h) $\int_0^2 [(x-3)^2 + 2] dx$;

Tipp1: Lásd 1.4 itt: 2 és 1.2 itt: 2 és 1.3 itt: 2.

Tipp2: Keress második megoldást az a-e feladatokra. Lásd 1.6 itt: 3.

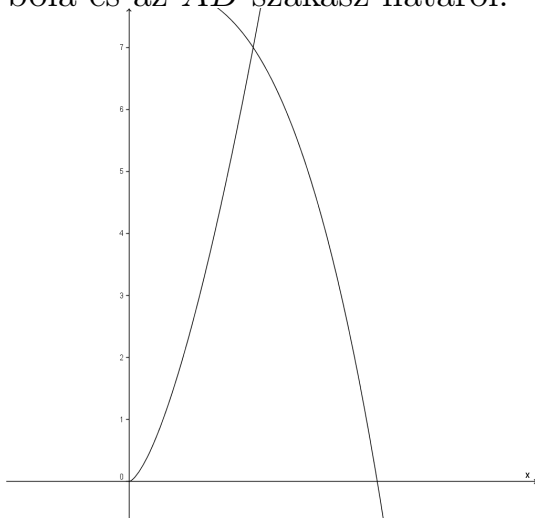
M:

a) 6; b) 8; c) 14; d) 22.5; e) $\frac{1}{3}$; f) 6; g) 6; h) $\frac{38}{3}$

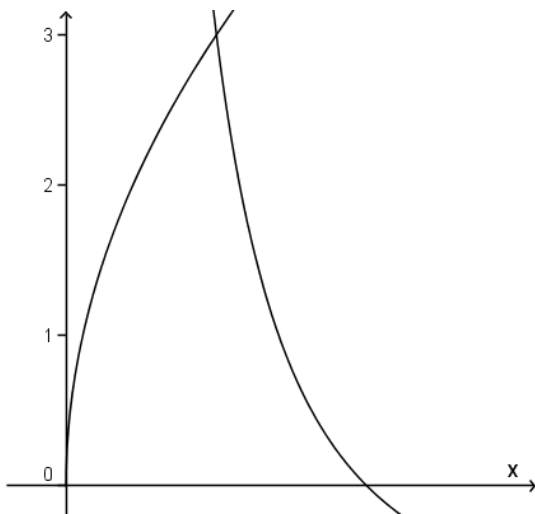
1.9. Feladat - két görbe által határolt terület 25 perc

a) Az $y = x^2 - 4x + 5$ egyenletű parabola és az $y = -x + 5$ egyenletű egyenes metszéspontjai

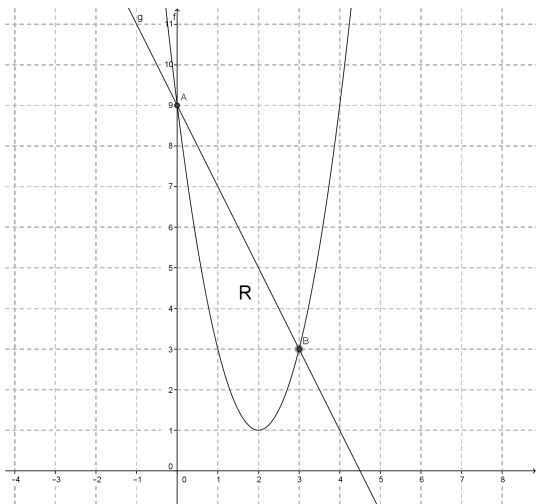
$A(0, 5)$ és $B(3, 2)$, amint a lenti ábra mutatja. Határozd meg azt a területet, amelyet a parabola és az AB szakasz határol.



b) Az $y = x^2 - 2x + 2$ egyenletű parabola és az $y = x + 2$ egyenletű egyenes metszéspontjai $A(0, 2)$ és $B(3, 5)$, amint a lenti ábra mutatja. Határozd meg azt a területet, amelyet a parabola és az AB szakasz határol.



c) Az $y = 2x^2 - 8x + 9$ egyenletű parabola és az $y = -2x + 9$ egyenletű egyenes metszéspontjai $A(0, 9)$ és $B(3, 3)$, amint a lenti ábra mutatja. Határozd meg azt a területet, amelyet a parabola és az AB szakasz határol.



Tipp: Lásd 1.5 itt: 2 és 1.6 itt: 3.

M:

a) $10.5 - 6 = 4.5$; b) $10.5 - 6 = 4.5$; c) $18 - 9 = 9$;

1.10. Feladat - y meghatározása $\frac{dy}{dx}$ -ből; 20 perc

a) Egy alakzat egyenletének deriváltja: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 10$. A görbe átmegy a $P(1, 12)$ ponton. Határozd meg az alakzat egyenletét.

b) Egy alakzat egyenletének a deriváltja: $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 9x^2 + 8x$. A görbe átmegy a $P(0, 10)$ ponton. Határozd meg az alakzat egyenletét.

c) Egy alakzat egyenlete: $y = f(x)$. A $P(9, 0)$ pont rajta van az alakzaton. Feltéve, hogy $f'(x) = \frac{x+9}{\sqrt{x}}$, ($x > 0$) határozd meg $f(x)$ -t.

d) Egy alakzat egyenlete: $y = f(x)$. A $P(1, -7)$ pont rajta van az alakzaton. Feltéve, hogy $f'(x) = \frac{(x^2-2)^2}{x^2}$, ($x \neq 0$) határozd meg $f(x)$ -t.

Tipp: 1. lépés: integrál; 2. lépés: a konstans meghatározása behelyettesítéssel

M:

a) $x^3 - 2x^2 + 10x + 3$; b) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 10$; c) $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} - 72$; d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^{-1} - 4x + \frac{2}{3}$