Matematika 9
Tankönyv és feladatgyűjtemény

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár

III. fejezet - Függvények (kb. 15 tanóra)

2015. december 19.

copyright: ©Juhász László
Ennek a könyvnek a használatát szerzői jog védi. A megvásárlásra vonatkozó információkért kérem látogasson el honlapomra.
www.bioszoft.hu

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

Ez a fejezet a függvényekkel kapcsolatos ismereteket tartalmazza. Részletesen lásd a fejezet végén a tartalomjegyzéket.

1. Függvények

A függvények jelentős szerepet töltenek be a tudományos életben reál és humán területeken egyaránt. Fizikában például sokszor keresünk két adat között valamilyen függvénykapcsolatot. A gazdasági folyamatokban kereshetjük azokat a paramétereket, amikor a haszon maximális. Szociológiában bizonyos adatok időbeli növekedése (munkanélküliek száma) vagy csökkenése (születésszám) lényeges.

1.1. A függvény és hozzá kapcsolódó fogalmak

1.1.1. Definíció-függvény, ÉT, ÉK... 15 perc

Ha A és B nem üres halmazok, akkor azt a hozzárendelést, ami az A halmaz minden eleméhez hozzárendeli a B halmaz egy-egy elemét függvénynek nevezzük.
jelölés: $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}\ x \mapsto f(x)$

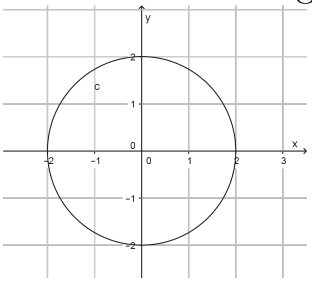
megjegyzés1: A hozzárendelés alapfogalom, nem definiáljuk.
megjegyzés2: Számtalan függvény létezik. Itt a legtipikusabb a számhalmazok közti függvény, a geometriában pl. a tengelyes tükrözés is függvény, ott transzformációnak nevezzük. A felsőbb matematikában vannak olyan függvények, amelyek függvények között létesítenek kapcsolatot, ezek az operátorok, az analízis ezzel foglalkozó ága a funkcionál analízis és erre épül a kvantummechanika, az elméleti fizika egyik ága.
megjegyzés3: $x \mapsto f(x)$ a függvény hozzárendelési szabálya, szokásos alakja lehet még $y = f(x)$ vagy $f(x) = ...$ kifejezés is.
További definíciók következnek:
A függvény definíciójában szereplő A halmazt a függvény értemezési tartományának nevezzük, jelölései: ÉT vagy D_f (domain), az értelmezési tartomány elemei a változók, ezt általában x-el jelöljük.

A definícióban szereplő B halmazt a függvény képhalmazának nevezzük. Egy adott x változóhoz

rendelt B beli elemet pedig a függvény x helyen vett helyettesítési értékének, ennek jelölése: $f(x)$. A függvényértékek összességét értékkészletnek nevezzük, ennek jele ÉK vagy R_f (range).

A függvények jól szemléltethetők a koordináta rendszerben, az x tengely bizonyos pontjai megfelelnek a változóknak, az y tengely egyes pontjai pedig a függvény értékeknek. Ekkor az így kapott görbét a függvény grafikonjának nevezzük, azt fontos azonban kiemelni, hogy nem ez a függvény. A függvény egy egyértelmű hozzárendelés!!!

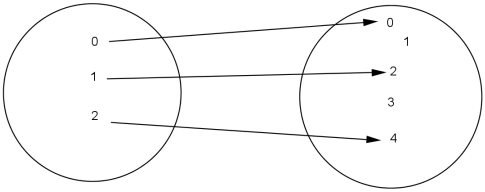
Általában a függvény grafikonja valamilyen alakzat, vagy pontok, viszont megfordítva nem feltétlenül igaz, tehát nem minden alakzathoz tartozik függvény. Az alábbi ábrán egy ilyet látunk:



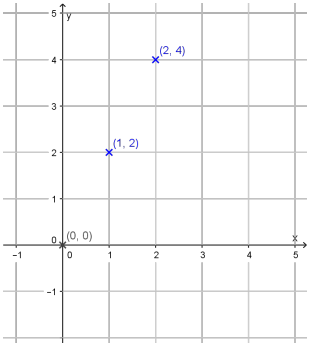
1.1.2. Példa

Adott f függvény:
$f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $x \mapsto 2x$
Szemléltessük Venn diagrammal, koordináta rendszerben, adjuk meg az értelmezési tartományát, a 0, 1, 2 helyeken vett helyettesítési értékeit ($f(0)$, $f(1)$, $f(2)$), az értékkészletét.

M:



A függvény arról ismerhető fel, hogy a kiindulási halmaz minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki.

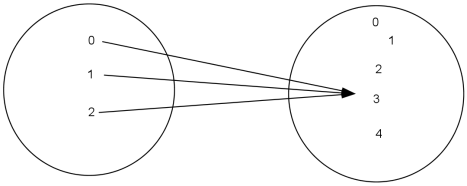


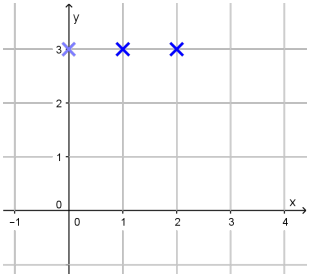
ÉT: $\{0, 1, 2\}$, $f(0) = 0$ (ez a nulla helyen felvett helyettesítési érték), $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, ÉK: $\{0, 2, 4\}$
Megjegyzés: Az értelmezési tartományt a grafikonnak az x tengelyre eső merőleges vetületeként kaphatjuk, az értékkészletet pedig az y tengelyre vetítéssel kapjuk.

1.1.3. Feladat 6 perc

Adott f függvény:
$f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $x \mapsto 3$
Szemléltessük Venn diagrammal, koordináta rendszerben, adjuk meg az értelmezési tartományát, a 0, 1, 2 helyeken vett helyettesítési értékeit ($f(0)$, $f(1)$, $f(2)$), az értékkészletét.

M:

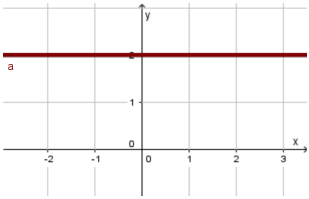


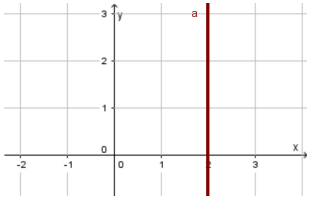


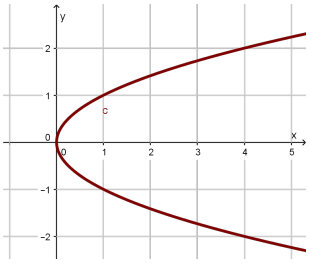
ÉT: $\{0, 1, 2\}$, $f(0) = 3$ (ez a nulla helyen felvett helyettesítési érték), $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, ÉK: $\{3\}$

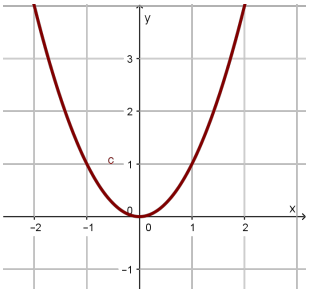
1.1.4. Feladat 1 perc

Állapíts meg, hogy az alábbi ábrák közül melyik nem lehet függvény grafikonja:

a) 

b) 

c) 

d) 

1.2. Lineáris függvények

1.2.1. Definíció-lineáris függvény

Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ függvényt lineáris függvénynek nevezzük.
megjegyzés1: Nomen est omen[1]: A lineáris függvény grafikonja egyenes. (line egyik jelentése egyenes)
Az a-t meredekségnek is nevezhetjük, szokás még m-mel is jelölni és az egyenes két pontjából az

[1] A név kötelez.

alábbi képlet alapján lehet kiszámolni:
$A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontokon áthaladó egyenes meredeksége (m): $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, ahol $x_2 - x_1 \neq 0$.
megjegyzés2: Ha $a = 0$, akkor a függvényt konstans (állandó) függvénynek nevezzük, ekkor a grafikon párhuzamos az x tengellyel.
megjegyzés3: Ha $b = 0$, akkor beszélhetünk egyenes arányosság függvényéről is, ekkor a grafikon az origón megy keresztül.

1.2.2. Feladat - lineáris függvény; 18 perc

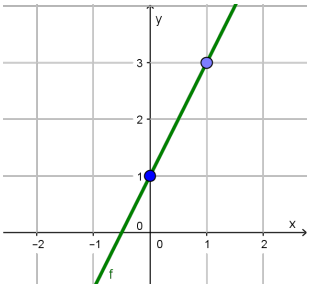
Ábrázold az alábbi függvények grafikonját (az értelmezési tartomány minden esetben a valós számok halmaza):
a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = 3x - 2$; c) $f(x) = x + 1$; d) $f(x) = -2x + 4$; e) $f(x) = 3$; f) $f(x) = x$; g) $f(x) = -x$; h) $f(x) = -3x$; i) $f(x) = -2$; j) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$; k) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$; l) $f(x) = -\frac{5}{4}x + 2$; m) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$;

Tipp: Az $f(x) = mx + b$ hozzárendelési utasítású függvény grafikonja minden esetben egy egyenes,

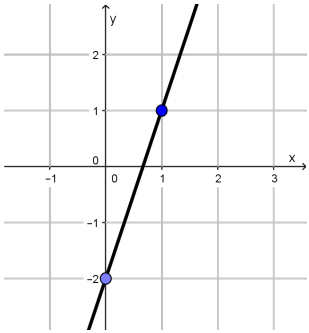
melynek a meredeksége m és átmegy a $(0, b)$ ponton.

M:

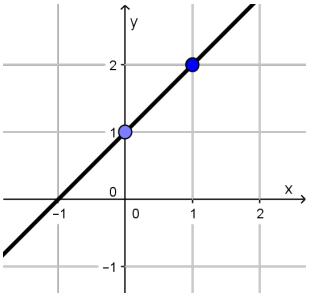
a)



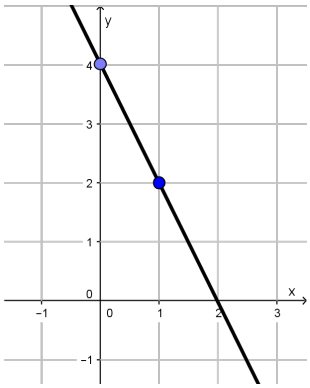
b)



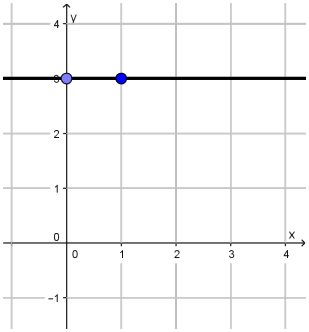
c)



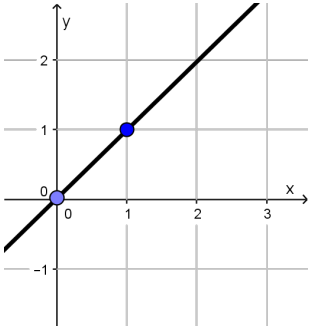
d)



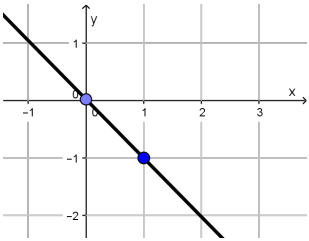
e)


y
x
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3
4

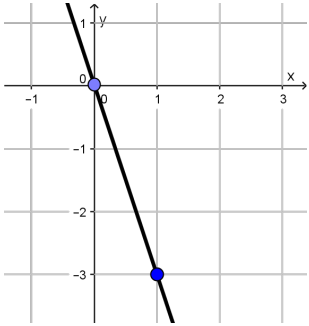
f)


y
x
2
1
0
−1
0
1
2
3

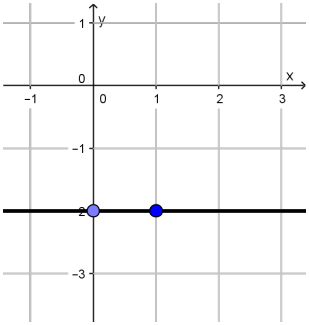
g)


y
x
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3

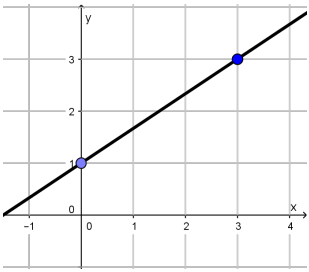
h)

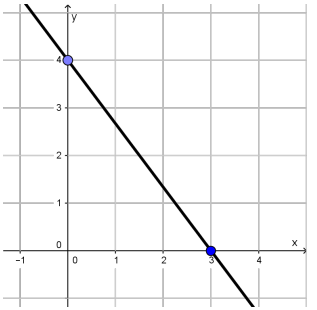

y
x
1
0
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3

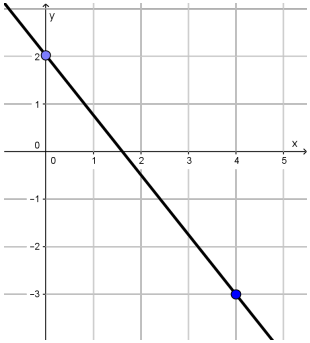
i)

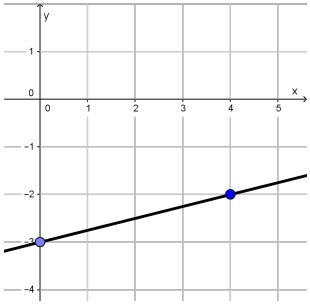

y
x
1
0
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3

j)


y
x
3
2
1
0
−1
0
1
2
3
4

k) 

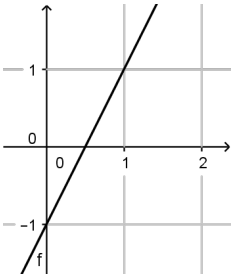
l) 

m) 

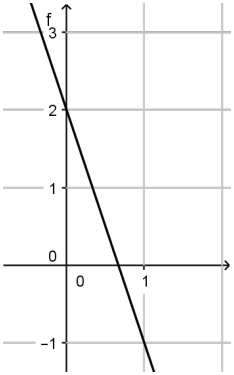
1.2.3. Feladat - lineáris függvény 4 perc

Határozd meg, hogy az egyes grafikonok mely függvényekhez tartoznak! (Az értelmezési tartomány minden esetben a valós számok halmaza.)

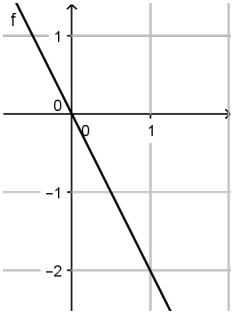
a)



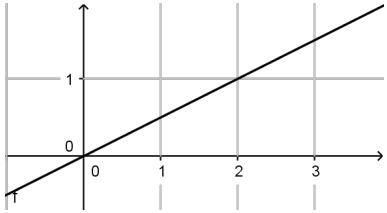
b)



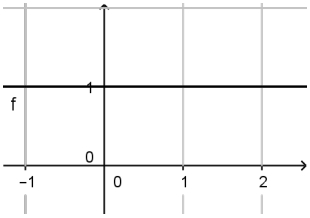
c)



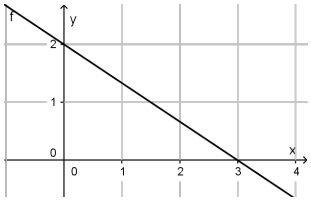
d)



e)



f)



M:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 1$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -3x + 2$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x$
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$

1.2.4. Definíció-zérus hely

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya és az értékkészlete is a valós számoknak valamely részhalmaza. Ekkor az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez tartozó helyettesítési érték nulla, zérushelynek nevezzük. Meghatározása kétféleképpen történhet:
1. módszer: Leolvassuk, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt.
2. módszer: Megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet.

1.2.5. Definíció-monotonitás

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya és az értékkészlete is a valós számoknak valamely részhalmaza. Az f függvény szigorúan monoton növekedő (rövidítve: szig. mon. nő) az értelmezési tartomány valamely részintervallumán, ha ezen intervallum bármely két $x_1 < x_2$ elemére teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_2)$.
Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonján képzeletben balról jobbra haladva felfelé megyünk. Jelölés: $\nearrow$

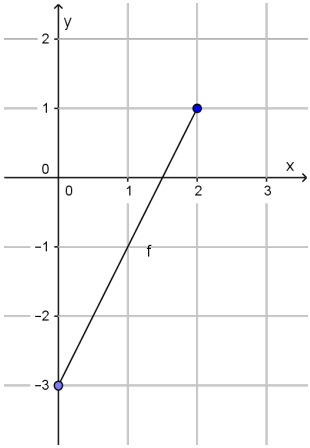
Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya és az értékkészlete is a valós számoknak valamely részhalmaza. Az f függvény szigorúan monoton csökkenő (rövidítve: szig. mon. cs.) az értelmezési tartomány valamely részintervallumán, ha ezen intervallum bármely két $x_1 < x_2$ elemére teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_2)$.
Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonján képzeletben balról jobbra haladva lefelé megyünk. Jelölés: $\searrow$

1.2.6. Példa

Adott az $f : [0; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$ függvény.
(i) Ábrázoljuk a grafikonját koordináta rendszerben.
(ii) Olvassuk le a zérushelyet a grafikonról.
(iii) Ellenőrizzük le algebrai módon a leolvasás helyességét.
(iv) Jellemezzük a függvényt monotonitás szempontjából.
(v) Állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel pozitív értékeket a függvény.
(iv) Állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel negatív értékeket a függvény.

M:

(i)



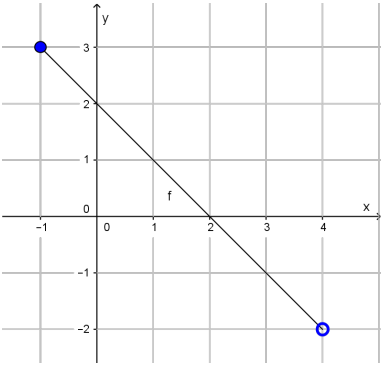
(ii) A zérushely az x tengely és a függvény grafikonjának a metszete, kb. 1,5.
(iii) A $2x - 3 = 0$ egyenletet kell megoldani, innen a zérushely $x = 1,5$.
(iv) A függvény a teljes értelmezési tartományán, vagyis a [0;2] intervallumon szig. mon. nő.
(v) Pozitív értékeket az]1,5;2] intervallumon vesz fel a függvény. (A grafikon x tengely feletti részét le kell vetíteni az x tengelyre. Segíthet a megértésben, ha arra gondolunk, hogy az x tengely az idő, az y pedig a hőmérséklet és azt keressük, hogy mikor pozitív a hőmérséklet?)
(vi) Negatív értékeket a [0;1,5[intervallumon vesz

fel a függvény. (A grafikon x tengely alatti részét fel kell vetíteni az x tengelyre.

1.2.7. Feladat-zérus hely, monotonitás 9 perc

Adott az $f : [-1; 4[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x + 2$ függvény.
(i) Ábrázold a grafikonját koordináta rendszerben.
(ii) Olvasd le a zérushelyet a grafikonról.
(iii) Ellenőrizd le algebrai módon a leolvasás helyességét.
(iv) Jellemezd a függvényt monotonitás szempontjából.
(v) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel pozitív értékeket a függvény.
(vi) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel negatív értékeket a függvény.

M:

(i) 

(ii) A zérushely (ZH): 2
(iii) A $-x+2=0$ egyenletet kell megoldani, innen a zérushely $x=2$.
(iv) A függvény a teljes értelmezési tartományán, vagyis a [-1;4[intervallumon szig. mon. csökken.
(v) Pozitív értékeket a [-1;2[intervallumon vesz fel a függvény.
(vi) Negatív értékeket a]2;4[intervallumon vesz fel a függvény.

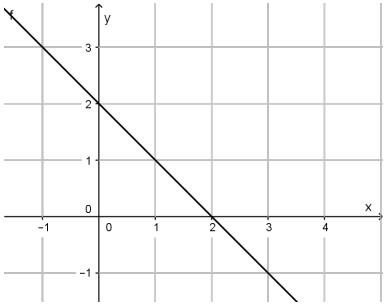
1.2.8. Feladat-zérus hely, monotonitás 8 perc

Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -x+2$ függvény.
(i) Ábrázold a grafikonját koordináta rendszerben.

(ii) Olvasd le a zérushelyet a grafikonról.
(iii) Ellenőrizd le algebrai módon a leolvasás helyességét.
(iv) Jellemezd a függvényt monotonitás szempontjából.
(v) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel pozitív értékeket a függvény.
(iv) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel negatív értékeket a függvény.

M:

(i)



(ii) ZH: 2
(iii) A $-x+2=0$ egyenletet kell megoldani, innen a zérushely $x=2$.

(iv) A függvény a teljes értelmezési tartományán, vagyis a $]-\infty;\infty[$ intervallumon szig. mon. csökken.
(v) Pozitív értékeket a $]-\infty;2[$ intervallumon vesz fel a függvény.
(vi) Negatív értékeket a $]2;\infty[$ intervallumon vesz fel a függvény.

1.2.9. Példa

Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x + 5$ függvény. A függvény ábrázolása nélkül válaszoljunk a következő kérdésekre:
(i) Mennyi a függvény zérushelye?
(ii) Jellemezzük monotonitás szempontjából a függvényt!
(iii) Állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel pozitív értékeket a függvény.
(iv) Állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel negatív értékeket a függvény.

M:
(i) A $-2x + 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk,

így a zérus hely 2,5.
(ii) Mivel a meredekség negatív, ezért a függvény szig. mon. csökkenő.
(iii) A zérus helynél vált előjelet a függvény, mivel csökkenő, ezért a zérus hely előtt lesz pozitív, vagyis a $]-\infty; 2,5[$ intervallumon.
(iv) A zérus hely után lesz negatív a függvény, vagyis a $]2,5; \infty[$ intervallumon.

1.2.10. Feladat 4 perc

Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 5$ függvény. A függvény ábrázolása nélkül válaszolj a következő kérdésekre:
(i) Mennyi a függvény zérushelye?
(ii) Jellemezd monotonitás szempontjából a függvényt!
(iii) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel pozitív értékeket a függvény.
(iv) Állapítsd meg, hogy az értelmezési tartomány mely intervallumán vesz fel negatív értékeket a függvény.

M:

(i) A $3x + 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, így a zérus hely $-\frac{5}{3}$.
(ii) Mivel a meredekség pozitív, ezért a függvény szig. mon. nő.
(iii) A zérus helynél vált előjelet a függvény, mivel nő, ezért a zérus hely után lesz pozitív, vagyis a $]-\frac{5}{3};\infty[$ intervallumon.
(iv) A zérus hely előtt lesz negatív a függvény, vagyis a $]-\infty;-\frac{5}{3}[$ intervallumon.

1.2.11. Példa

Az f lineáris függvény átmegy a $P(-1;-5)$ és $Q(5;7)$ pontokon.
(i) Határozzuk meg a meredekségét!
(ii) Határozzuk meg, hogy hol metszi az y tengelyt!
(iii) Adjuk meg a hozzárendelési utasítását!
(iv) Hol metszi az x tengelyt a függvény grafikonja?

M:
(i) Alkalmazzuk a következő tételt:
$A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontokon áthaladó egye-

nes meredeksége (m): $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, ahol $x_2 - x_1 \neq 0$.
Így: $m = \frac{7-(-5)}{5-(-1)} = 2$.
(ii) A függvény hozzárendelési szabálya $y = mx + b$. Ide behelyettesítjük az előző pontban kapott m-t, x helyére a Q pont első, y helyére pedig a második koordinátáját: $7 = 2 \cdot 5 + b$ és innen $b = -3$, vagyis az y tengelyt a $(0; -3)$ pontban metszi a függvény grafikonja.
(iii) Az előzőek alapján a hozzárendelési utasítás: $y = 2x - 3$.
(iv) A $2x - 3 = 0$ egyenletből $x = 1,5$, vagyis az $(1,5; 0)$ pontban metszi az x tengelyt a grafikon.

1.2.12. Feladat 8 perc

Az f lineáris függvény átmegy a $P(-17; -52)$ és $Q(5; 14)$ pontokon.
(i) Határozd meg a meredekségét!
(ii) Határozd meg, hogy hol metszi az y tengelyt!
(iii) Add meg a hozzárendelési utasítását!
(iv) Hol metszi az x tengelyt a függvény grafikonja?

M:
(i) $m = 3$ (ii) A $(0; -1)$ pontban metszi a függvény grafikonja az y tengelyt. (iii) A hozzárendelési utasítás: $y = 3x - 1$. (iv) $(\frac{1}{3}; 0)$

1.2.13. Feladat 8 perc

Az f lineáris függvény átmegy a $P(12; -4)$ és $Q(7; 1)$ pontokon.
(i) Határozd meg a meredekségét!
(ii) Határozd meg, hogy hol metszi az y tengelyt!
(iii) Add meg a hozzárendelési utasítását!
(iv) Hol metszi az x tengelyt a függvény grafikonja?

M:
(i) $m = -1$ (ii) A $(0; 8)$ pontban metszi a függvény grafikonja az y tengelyt. (iii) A hozzárendelési utasítás: $y = -x + 8$. (iv) $(8; 0)$

1.2.14. Feladat 8 perc

Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 5$ függvény. A függvény ábrázolása nélkül állapítsd meg, hogy

az alábbi pontok közül melyik illeszkedik a függvény grafikonjára!

a) $A(1;-2)$ b) $B(7;16)$ c) $C(10;26)$ d) $D(-4;-17)$ e) $E(-11;-39)$

Tipp: Az adott pont első koordinátáját helyettesítsd a függvény hozzárendelési utasításában az x helyére és számold ki az eredményt, amely ha megegyezik a pont második koordinátájával, akkor a pont rajta van az egyenes grafikonján.
M:
Az A, B, D pontok illeszkednek a függvény grafikonjára.

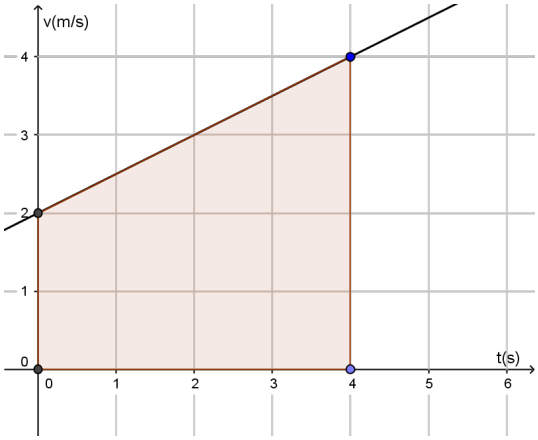
1.2.15. Feladat-fizikai alkalmazás 8 perc

Egyenletesen gyorsuló mozgást végző test sebességét az idő függvényében a $v(t) = 0,5t + 2$ képlet írja le, ahol t másodpercben, v pedig m/s-ban van.
(i) Ábrázold a sebesség-idő függvényt koordináta rendszerben (az időt a vízszintes tengelyen)!
(ii) Határozd meg, hogy mennyi utat tesz meg a test 4 s alatt, ha tudjuk, hogy a $v - t$ grafikon

alatti terület adja az utat.

M:

(i)



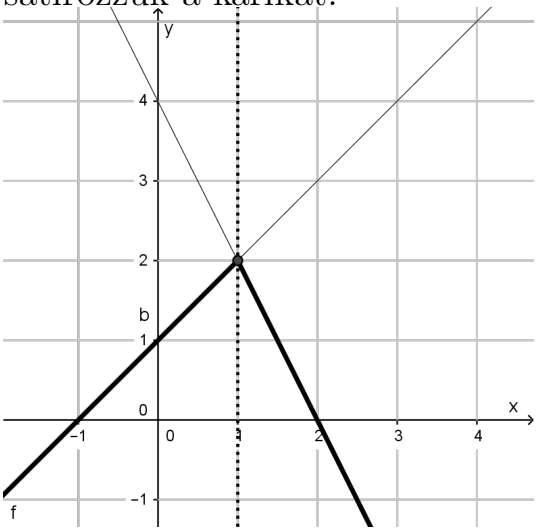
(ii) A megtett út 12 m (derékszögű trapéz területe).

1.2.16. Példa

Ábrázoljuk a következő, valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ha } x < 1 \\ -2x+4 & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

M: Az alábbi ábra a következőképpen készült:
1. lépés: 1-nél húzunk egy halvány (pontozott), függőleges vonalat.
2. lépés: Halványan ábrázoljuk az $x + 1$ lineáris függvényt.
3. lépés: 1-től balra kivastagítjuk, 1-nél üres karikát rajzolunk.
4. lépés: Halványan ábrázoljuk a $-2x+4$ függvényt.
5. lépés: 1-től jobbra kivastagítjuk, 1-nél besatírozzuk a karikát.



1.2.17. Példa

Jellemezzük az előző példában szereplő függvényt!
M:
ÉT: $\mathbb{R}$ (Ez meg volt adva.)
ÉK: $]-\infty; 2]$ (A grafikon pontjait merőlegesen az y tengelyre vetítjük.)
ZH: -1 és 2 (Ahol a grafikon az x tengelyt metszi.)
$\nearrow$: $]-\infty; 1]$ (A növekedő részt az x tengelyre vetítjük.)
$\searrow$: $[1; \infty[$ (A csökkenő részt az x tengelyre vetítjük.)
Max. h.: 1 (Maximum hely, ami a függvény legfelsőbb pontjának az első koordinátája, vagy az x tengelyre eső vetülete.)
Max. é.: 2 (Maximum érték, ami a függvény legfelsőbb pontjának a második koordinátája vagy az y tengelyre eső vetülete.)

Megjegyzés1: Az első öt jellemzési szempontot (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérus hely, szig. mon. növekedés, szig. mon. csökkenés) korábban tárgyaltuk. Itt a maximum hely és érték új fogalmak. Valójában beszélhetünk he-

lyi (lokális) vagy abszolút (totális) szélsőértékről is. A Földön totális maximum a Csomolungma, egy helyi maximum a Kékes tető. Amikor a függvényt jellemezzük, akkor a helyi szélsőértékeket, maximumokat és minimumokat soroljuk fel.

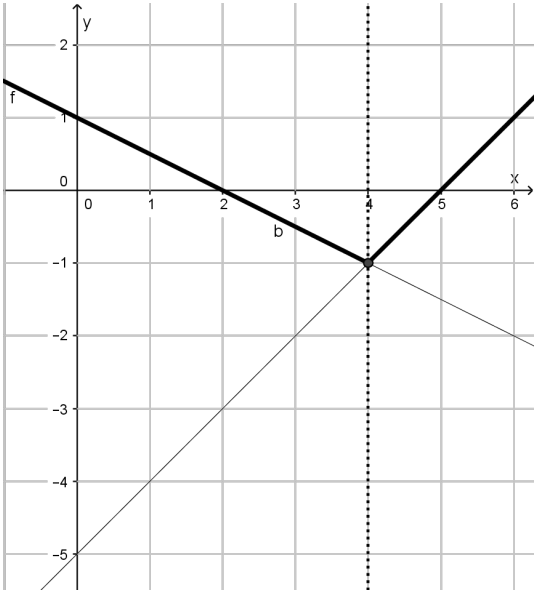
Megjegyzés2: Amelyik jellemzési szempontban szerepel az érték szó (ÉK, min. érték, max. érték), ott az y tengelyre vetítünk, a többinél az x-re.

1.2.18. Feladat 6 perc

Ábrázold a következő, valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{ha } x < 4 \\ x - 5 & \text{ha } 4 \leq x \end{cases}$$

M:



1.2.19. Feladat 3 perc

Jellemezd az előző feladatban szereplő függvényt!

M:
ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[-1;\infty[$, ZH: 2 és 5, $\nearrow$: $[4;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;4]$ Min. h.: 4 Min. é.: -1

1.2.20. Feladat+++-egy szép fizikai feladat versenyzőknek

A kovácsműhelyben a kovács másodpercenként csap az üllőre, a hang 340 m/s terjedés sebességgel terjedve nagyon messzire elhallatszik. Ha kerékpárral 10 m/s sebességgel távolodunk a műhelytől, akkor milyen gyakran halljuk az ütéseket? Milyen gyakran halljuk az ütéseket, ha ugyenekkora sebességgel közelítünk a műhelyhez?[2]

M:
$\frac{34}{33}$s; $\frac{34}{35}$s

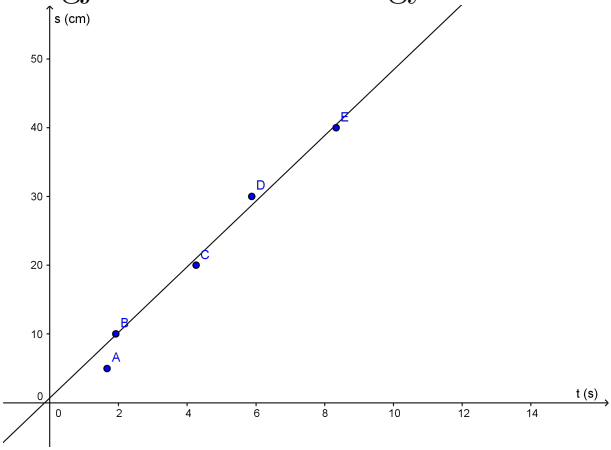
1.2.21. Feladat+ 5 perc

Az alábbi táblázat egy fizikai mérést mutat. Itt egy buborék mozgását vizsgáljuk, az általa megtett utakat mértük háromszor és ezen mérések átlagát tüntettük fel a táblázatban. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a buborék egyenletes mozgást végez, tehát érvényes rá az $s = v \cdot t$ összefüggés.

[2]Ez a feladat Baranyi Károly: A fizikai gondolkodás iskolája című könyvből származik. Versenyzőknek melegen ajánlott!!!

s (cm)	5	10	20	30	40
t (s)	1,67	1,92	4,26	5,88	8,33
$\frac{s}{t}$ (cm/s)					

(i) Töltsd ki a táblázat hiányzó sorát.
(ii) Az öt mérést átlagolva határozd meg a buborék sebességét.
(iii) Az alábbi grafikonon a geogebra szoftverben ábrázoltuk a mért pontokat (alsó sorba pl. az (1.67,5) számpár, majd enter; : tizedes pontot kell használni), majd az első mérést figyelmen kívül hagyva megrajzoltattuk a szoftverrel a legjobban illeszkedő egyenest.



A szoftver az egyenes egyenletét az

$y = 4,77x + 0,69$ képletben adja meg. Mennyi ez alapján a buborék sebessége?
(iv) Melyik módszer adja meg pontosabban a buborék sebességét?

M:

(i)

s (cm)	5	10	20	30	40
t (s)	1,67	1,92	4,26	5,88	8,33
$\frac{s}{t}$ (cm/s)	3	5,2	4,7	5,1	4,8

(ii) $v = 4,56\frac{cm}{s}$
(iii) $v = 4,77\frac{cm}{s}$
(iv) A második, egyenes illesztéses módszer, mert a hibás mérés nem torzítja az eredményt.
Megjegyzésf(+++): A lineáris regresszió segítségével is illeszthetjük az egyenest. A fehér függvénytáblázat 48. oldalán azt olvashatjuk, hogy a regressziós egyenes az az egyenes, amelytől a minta y irányú eltéréseinek a négyzetösszege minimális. Az egyenes egyenletét a Sharp EL-520 tipusú számológéppel a következő módon határozhatjuk meg:
MODE, 1, 1 (átváltottunk statisztikus módba, azon belül is a lineáris regresszió számításba)
1,92, STO, 10, M+ (bevittük az első adatpárt)

4,26, STO, 20, M+ (bevittük a 2. adatpárt)
5,88, STO, 30, M+
8,33, STO, 40, M+
ALPHA,) és kapjuk a meredekséget 4,769≈4,77
ALPHA, (és kapjuk, hogy hol metszi az egyenes az y tengelyt 0,69
Így a regressziós egyenes egyenlete: $y = 4,77x + 0,69$
Hátránya a módszernek, hogy az origóra nem illeszkedik az egyenes, pedig ez egy biztos mérési pont.

1.3. Abszolútérték függvény

1.3.1. Definíció-abszolút érték

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{ha } x < 0 \\ x & \text{ha } 0 \leq x \end{cases}$$

Szavakkal: A negatív számok abszolút értéke a szám -1-szerese (ellentettje), nemnegatív számok abszolút értéke pedig önmaga. Azt is mondhatjuk, hogy az abszolút érték a nullától való távolság.
Példa: $|-2| = 2$, $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|x^2| = x^2$,

$|-x^2-1| = x^2+1$
Megjegyzés++: Mivel a 0 ellentettje is 0, ezért a fenti definícióval egyenértékű az alábbi:

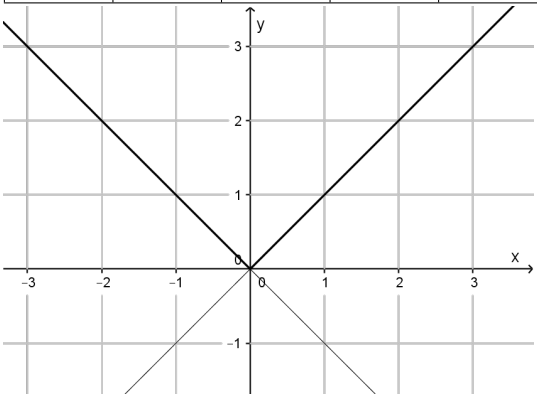
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{ha } x \leq 0 \\ x & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Ebből következik, hogy az $|x-3| = 3-x$ egyenlet megoldása $x-3 \leq 0$, vagyis $x \leq 3$.

1.3.2. Az abszolútérték függvény definíciója, ábrázolása, jellemzése

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x|$ függvényt abszolútérték függvénynek nevezzük.
Ábrázolása háromféleképpen történhet:
1. módszer: Ábrázoljuk x függvényt majd az x tengely alatti részt tükrözzük az x tengelyre.
2. módszer: Ábrázoljuk a $-x$ és az x lineáris függvényeket halványan, majd a $-x$ grafikonját az y tengelytől balra, az x grafikonját pedig jobbra kiemeljük.
3. módszer: Táblázatot készítünk, majd a kapott pontokat ábrázoljuk, végül összekötjük:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3



Jellemzése: ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0;\infty[$, ZH: 0, $\nearrow$: $[0;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;0]$ Min. h.: 0 Min. é.: 0

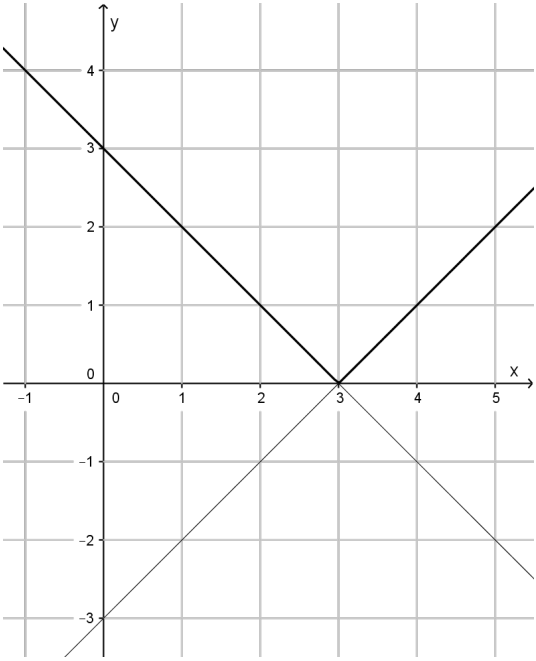
1.3.3. Példa

Ábrázoljuk a következő függvényt:
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x-3|$

M: Az $x-3$ lineáris függvénynek 3-nál van a zérushelye, szig. mon. nő, ezért 3 előtt negatív, 3 után pozitív. Felhasználva az abszolútérték definícióját:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{ha } x < 3 \\ x - 3 & \text{ha } 3 \leq x \end{cases}$$

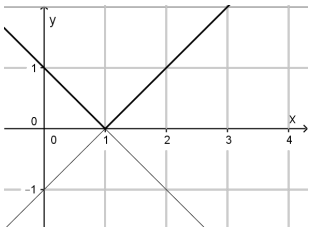
Az ábrázolást végezhetjük lineáris függvényekre visszavezetéssel, vagy táblázat alapján is:

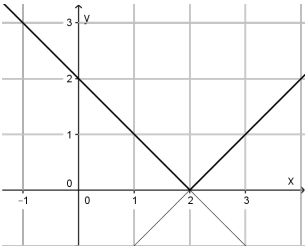


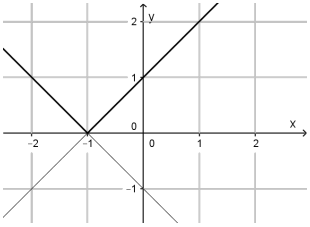
1.3.4. Feladat 6 perc

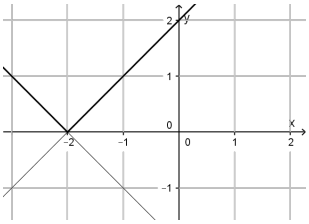
Ábrázold a következő függvényeket:
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x-1|$
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x-2|$
c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x+1|$
d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x+2|$

M:

a)


b)


c)


d)


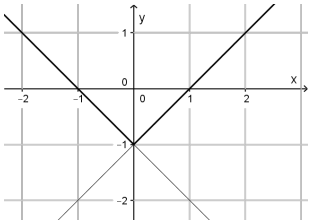
1.3.5. Tétel-függvény transzformáció

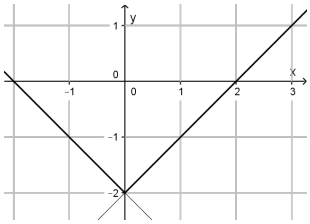
Az előző feladatok alapján láthatjuk, hogy jóval egyszerűbben is ábrázolhatjuk a fenti függvényeket, mégpedig x tengely menti eltolást alkalmazva. Pontosabban megfogalmazva:
Az $|x - a|$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját jobbra toljuk az x tengely mentén a értékkel.
Az $|x + a|$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját balra toljuk az x tengely mentén a értékkel.

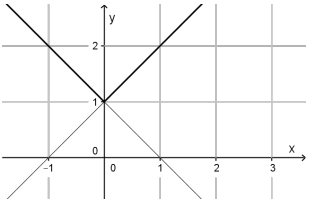
1.3.6. Feladat 12 perc

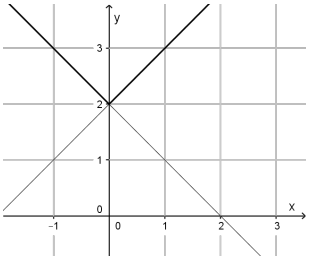
Ábrázold a következő függvényeket hagyományos úton, visszavezetve lineáris függvényekre:
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x| - 1$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x| - 2$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x| + 1$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x| + 2$

M:

a) 

b) 

c) 

d) 

1.3.7. Tétel-függvény transzformáció

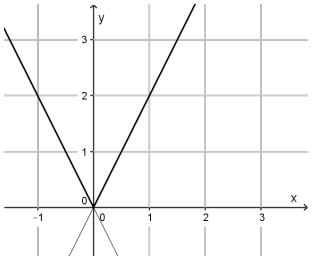
Itt is lehet ábrázolni egyszerűbben, csak most y tengely mentén kell eltolni az alapfüggvény grafikonját. Pontosan megfogalmazva:
Az $|x| + a$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját felfelé toljuk az y tengely mentén a értékkel.

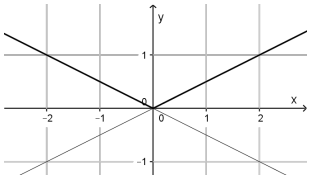
Az $|x| - a$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját lefelé toljuk az y tengely mentén a értékkel.

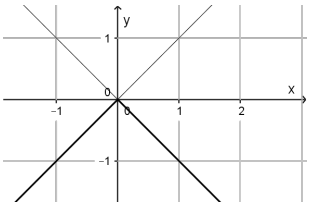
1.3.8. Feladat 12 perc

Ábrázold a következő függvényeket hagyományos úton, visszavezetve lineáris függvényekre:
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2 \cdot |x|$
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{1}{2} \cdot |x|$
c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -|x|$

M:

a) 

b) 

c) 

1.3.9. Tétel-függvény transzformáció

Újabb transzformációs szabályokat alkothatunk: Az $a \cdot |x|$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját y irányban nyújtjuk a-szorosára. Más szóval az x tengelytől a távolságokat a-szorosára változtatjuk.
A $-|x|$ függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az $|x|$ függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre.

1.3.10. Példa

Ábrázoljuk a következő függvényt:
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -2 \cdot |x - 3| - 1$

M: Az ábrázolást transzformációk egymásutánjaként

végezzük el. Fontos a sorrend, lássuk az ábrázolás lépéseit:

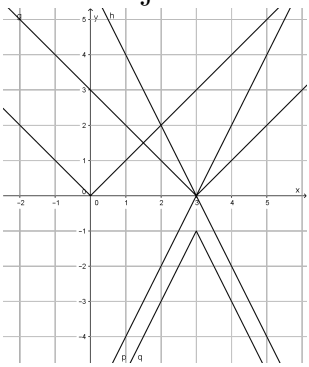
1. lépés: $|x|$ grafikonjának ábrázolása, pl. a (0;0), (2;2), $(-2; 2)$ pontokkal a 'v' alak egyértelműen megrajzolható.

2. lépés: $|x - 3|$ grafikont rajzoljuk meg úgy, hogy az előzőt eltoljuk jobbra hárommal. Ehhez elég az ott ábrázolt három pont eltolása.

3. lépés: $2 \cdot |x - 3|$ grafikon ábrázolása az előzőt felhasználva nyújtással.

4. lépés: $-2 \cdot |x - 3|$ grafikon következik az x tengelyre tükrözéssel.

5. lépés: $-2 \cdot |x-3|-1$: az előző grafikont eggyel lefelé toljuk.



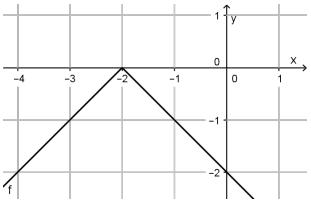
Megjegyzés1: A 3. és 4. lépés felcserélhető.
Megjegyzés2: Az ábrázolást egy lépésben is el lehet végezni úgy, hogy az origót eltoljuk képzeletben hárommal jobbra, eggyel lefelé, itt lesz a grafikon csúcsa. Ezt követően innen kettőt jobbra lépünk és négyet lefelé a kétszeres nyújtás és a "-" miatt. Aztán a képzeletbeli origóból kettőt balra lépünk és négyet lefelé és így meg lehet rajzolni a kész grafikont.

1.3.11. Feladat 30 perc

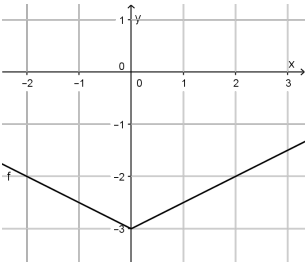
Ábrázold a következő függvényeket transzformációt alkalmazva:
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -|x+2|$
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{1}{2} \cdot |x| - 3$
c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -|x| + 1$
d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2 \cdot |x-3|$
e) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x+4| - 2$
f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -3 \cdot |x|$
g) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -2 \cdot |x+3| + 4$
h+) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |-2 \cdot |x+3| + 4|$
i) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot |x-1| - 2$
j+) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |-\frac{1}{2} \cdot |x-1| - 2|$

M:

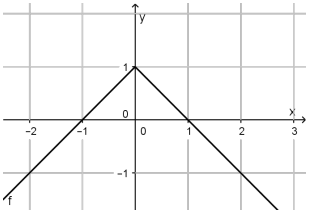
a)



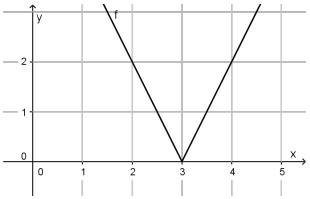
b)



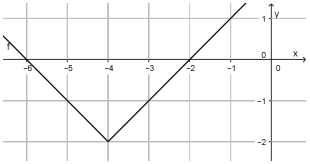
c)



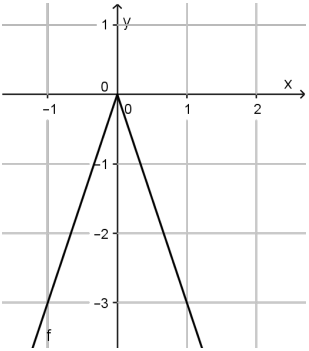
d)

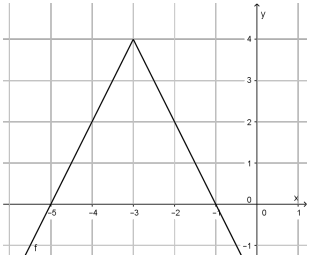


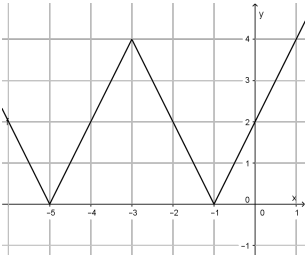
e)

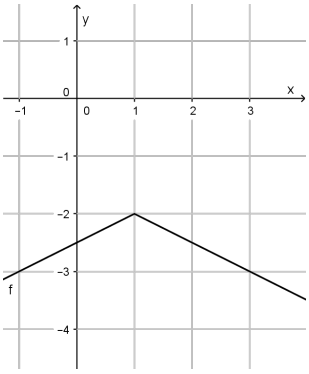


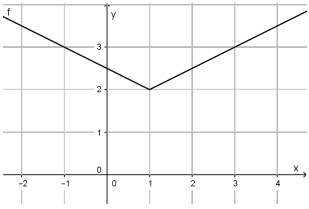
f)



g) 

h) 

i) 

j) 

1.3.12. Feladat 20 perc

Jellemezd az előző feladat a-h pontjaiban szereplő függvényeket!

M:
a) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $]-\infty;0]$, ZH: -2, $\nearrow$: $]-\infty;-2]$, $\searrow$: $[-2;\infty[$ Min. h.: $-$, Min. é.: $-$, Max. h.: -2, Max. é.: 0

b) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[-3;\infty[$, ZH: -6 és 6, $\nearrow$: $[0;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;0]$ Min. h.: 0, Min. é.: -3, Max. h.: $-$, Max. é.: $-$

c) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $]-\infty;1]$, ZH: -1 és 1, $\nearrow$: $]-\infty;0]$, $\searrow$: $[0;\infty[$ Min. h.: $-$, Min. é.: $-$, Max. h.: 0, Max. é.: 1

d) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0;\infty[$, ZH: 3, $\nearrow$: $[3;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;3]$ Min. h.: 3, Min. é.: 0, Max. h.: $-$, Max. é.: $-$

e) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[-2;\infty[$, ZH: -2 és -6, $\nearrow$: $[-4;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;-4]$ Min. h.: -4, Min. é.: -2, Max. h.: $-$, Max. é.: $-$

f) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $]-\infty;0]$, ZH: 0, $\nearrow$: $]-\infty;0]$, $\searrow$: $[0;\infty[$ Min. h.: $-$, Min. é.: $-$, Max. h.: 0, Max. é.: 0

g) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $]-\infty;4]$, ZH: -1 és -5, $\nearrow$: $]-\infty;-3]$, $\searrow$: $[-3;\infty[$ Min. h.: $-$, Min. é.:

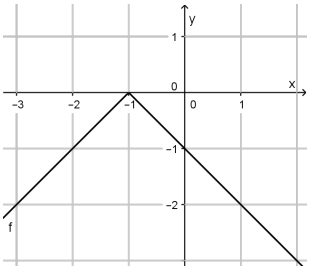
−, Max. h.: −3, Max. é.: 4

h) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0;\infty[$, ZH: -1 és -5, $\nearrow$: $[-5;-3]$ illetve $[-1;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;-5]$ illetve $[-3;-1]$ Min. h.: -5 és -1, Min. é.: 0 és 0, Max. h.: -3, Max. é.: 4

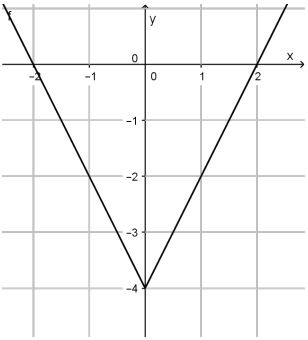
1.3.13. Feladat 3 perc

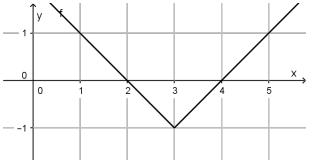
Az alábbi ábrákon abszolútérték függvények grafikonjai láthatók. Add meg a függvények hozzárendelési utasítását!

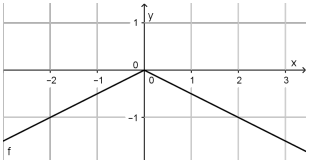
a)



b)



c) 

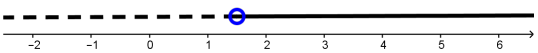
d) 

M:
a) $-|x+1|$ b) $2 \cdot |x| - 4$ c) $|x-3| - 1$ d) $-\frac{1}{2}|x|$

1.3.14. Példa

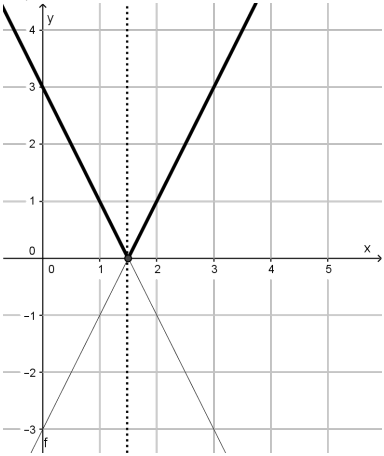
Ábrázoljuk az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto |2x-3|$ függvényt.

M: Lineáris függvényekre vezetjük vissza az ábrázolást. Vizsgáljuk a $2x-3$ függvényt. A zérushelye 1,5-nél van, szigorúan monoton növekedő, így 1,5 előtt negatív, utána pozitív. Ez számegyenesen (a karika a zérus helyet jelzi, a szaggatott vonal azt, ahol a függvény negatív, a folytonos vonal pedig azt, ahol a függvény pozitív):



Ez alapján két esetet vizsgálunk:
1. eset: ha $x < 1,5$, akkor $|2x-3| = -2x+3$
2. eset: ha $1,5 \leq x$, akkor $|2x-3| = 2x-3$

Ezek után az ábrázolás:
1. lépés: 1,5-nél határvonalat húzunk halványan (pontozott vonal)
2. lépés: $-2x+3$ ábrázolása, 1,5 előtt kiemeljük, 1,5-nél üres karika
3. lépés: $2x-3$ ábrázolása, 1,5 után kiemeljük, 1,5-nél tömör karika



Megjegyzés1: A $|2x-3| = 2 \cdot |x-1,5|$ átalakítással, majd ezt követően transzformációval is lehetett volna ábrázolni.
Megjegyzés2: Egy további ábrázolási módszer, ha először ábrázoljuk a $2x-3$ lineáris függvényt, majd az x tengely alatti részt tükrözzük az x

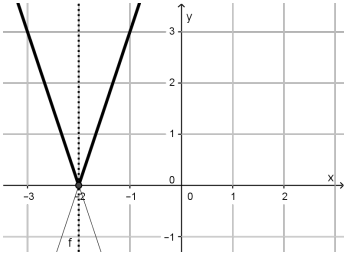
tengelyre.

1.3.15. Feladat 12 perc

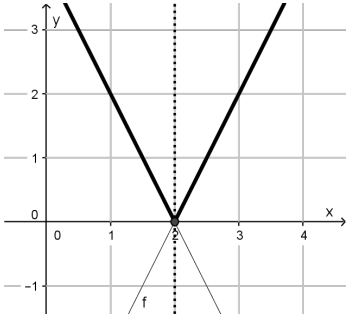
Ábrázold az alábbi függvényeket:
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |3x + 6|$ függvényt.
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |2x - 4|$ függvényt.
c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |-2x + 4|$ függvényt.

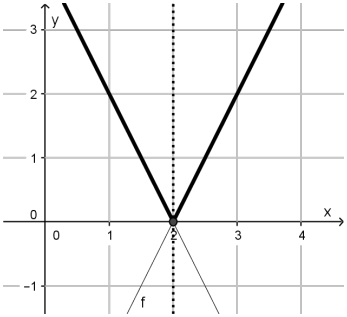
M:

a)



b)

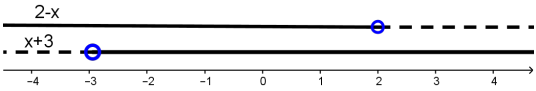


c) 

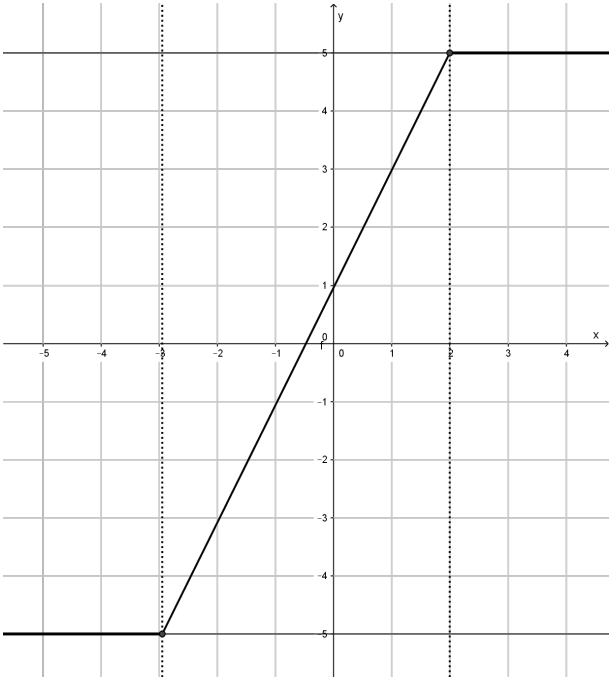
1.3.16. Példa++

Ábrázoljuk az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto |x+3| - |2-x|$ függvényt.

M: Itt is lineáris függvényekre vezetjük vissza az ábrázolást. Az $x+3$ lineáris függvény zérushelye a -3, mivel szig. mon. nő, ezért előtte negatív, utána pozitív. $2-x$ zérushelye 2, mivel szig. mon. csökken, ezért előtte pozitív, utána pedig negatív. Ezt egy számegyenesen feltüntetjük (a folytonos vonal a pozitív, a szaggatott a negatív részeket jelöli):



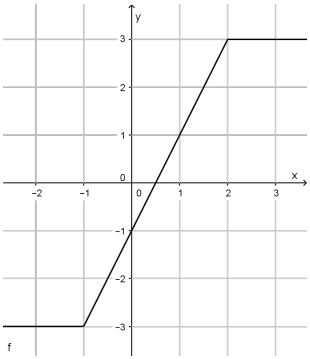
Ez alapján 3 esetet vizsgálunk (felhasználjuk az abszolút érték definícióját):
1. eset: $x < -3$, ekkor $|x+3| - |2-x| = -x-3-(2-x) = -5$
2. eset: $-3 \leq x \leq 2$, ekkor $|x+3| - |2-x| = x+3-(2-x) = 2x+1$
3. eset: $2 \leq x$, ekkor $|x+3| - |2-x| = x+3-(-2+x) = 5$
Ezután két függőleges egyenest húzunk -3-nál és 2-nél és ábrázoljuk az egyes lineáris függvényeket, majd a megfelelő tartományban kiemeljük:

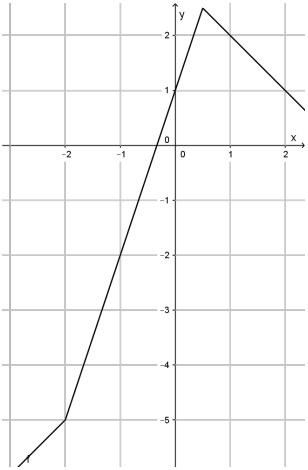


1.3.17. Feadat++ 30 perc

a) Ábrázold az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x+1| - |2-x|$ függvényt.
b) Ábrázold az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto |x+2| - |2x-1|$ függvényt.

M:

a) 

b) 

1.4. Másodfokú függvény

1.4.1. Definíció

Az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto ax^2+bx+c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ függvényt másodfokú függvénynek nevezzük.

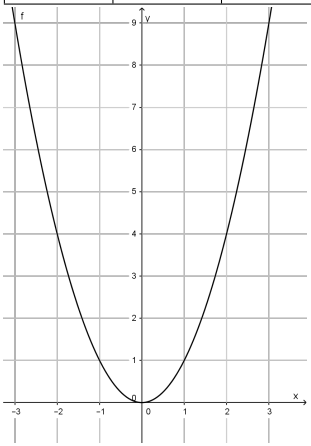
1.4.2. Feladat 5 perc

Töltsd ki az alábbi táblázatot, majd ennek alapján ábrázold az f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ függvényt, majd jellemezd!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							

M:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9



Megjegyzés: A másodfokú függvény grafikonjának a képe parabola.
Jellemzése: ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0;\infty[$, ZH: 0, $\nearrow$: $[0;\infty[$, $\searrow$: $]-\infty;0]$ Min. h.: 0 Min. é.: 0
A függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. Ez azt jelenti, hogy ha a grafi-

kont tükrözzük erre a tengelyre, akkor önmagába megy át. Ez azért van, mert pl. $(-3)^2 = 3^2$ vagy általánosítva $(-x)^2 = x^2$. Ezért a párosság pontos definíciója: Egy f függvényt párosnak nevezünk, ha az értelmezési tartomány minden elemére teljesül, hogy $f(-x) = f(x)$.

Beszélhetünk páratlan függvényről is, ennek a definíciója: Egy f függvényt páratlannak nevezünk, ha az értelmezési tartomány minden elemére teljesül, hogy $f(-x) = -f(x)$. A páratlan függvényt arról ismerhetjük meg, hogy a grafikonja szimmetrikus az origóra.

1.4.3. Feladat

Keress páros és páratlan függvényeket a lineáris és az abszolútértékes függvények között.

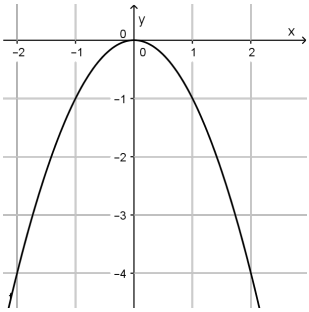
M:
pl. páros függvényre: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto 3$ vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$
pl. páratlan függvényre: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x$ vagy

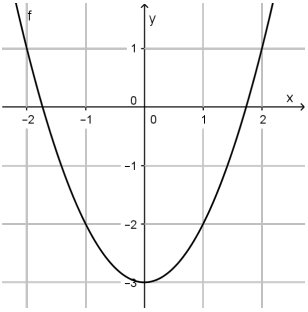
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -x,$

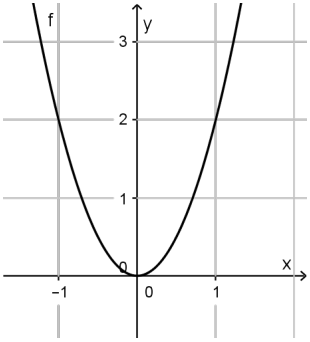
1.4.4. Feladat 12 perc

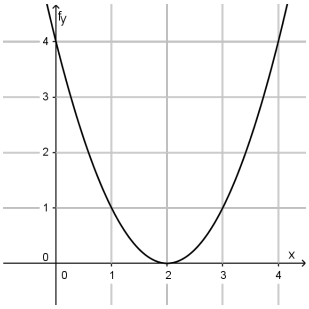
Táblázat készítésével ábrázold az alábbi függvényeket:
a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -x^2$
b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^2 - 3$
c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2 \cdot x^2$
d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto (x-2)^2$

M:

a) 

b) 

c) 

d) 

1.4.5. Tétel-transzformációk

Az előző feladat alapján a másodfokú függvényt is ábrázolhatjuk transzformációval. A szabályok: Az $x^2 + a$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját felfelé toljuk az y tengely mentén a értékkel. Az $x^2 - a$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját lefelé toljuk az y tengely mentén a értékkel.

Az $(x-a)^2$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját jobbra toljuk az x tengely mentén a értékkel. Az $(x+a)^2$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy

is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját balra toljuk az x tengely mentén a értékkel.

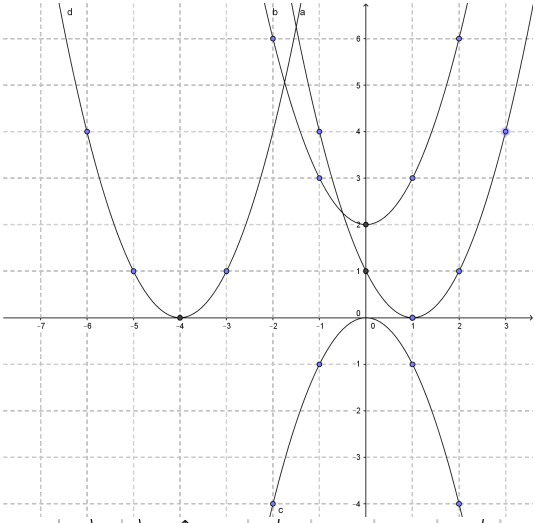
Az $a \cdot x^2$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját y irányban nyújtjuk a-szorosára. Más szóval az x tengelytől a távolságokat a-szorosára változtatjuk.

A $-x^2$ függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy az x^2 függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre.

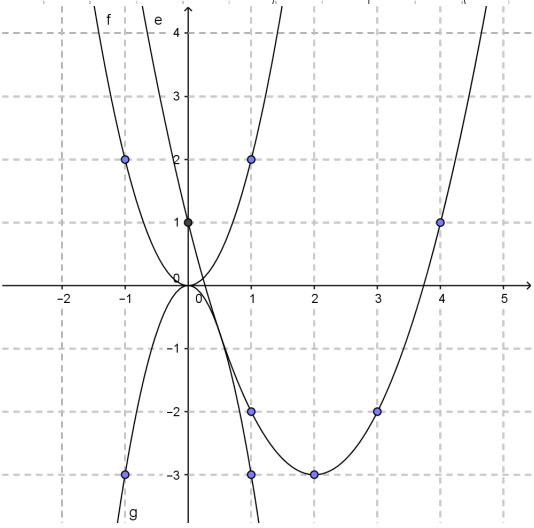
1.4.6. Feladat - másodfokú függvény; 15 perc

Ábrázold az alábbi függvények grafikonjait. Az értelmezési tartomány minden esetben a valós számok halmaza:
a) $a(x) = (x-1)^2$; b) $f(x) = x^2 + 2$; c) $f(x) = -x^2$; d) $f(x) = (x+4)^2$; e) $f(x) = (x-2)^2 - 3$; f) $f(x) = 2x^2$; g) $f(x) = -3x^2$; h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 5$; i) $f(x) = -(x-5)^2 + 3$
M:

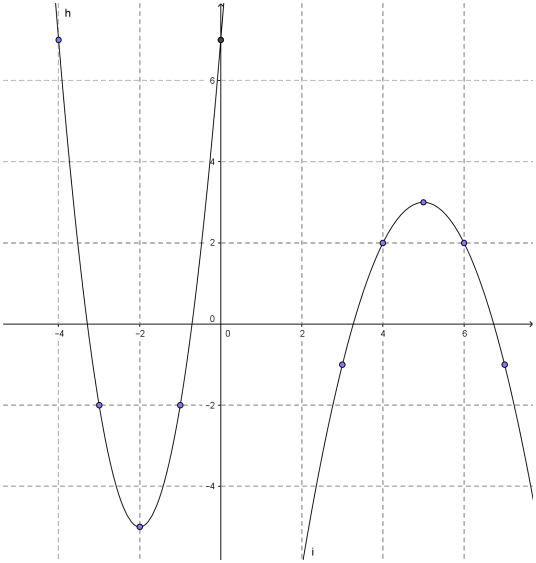
a-d



e-g

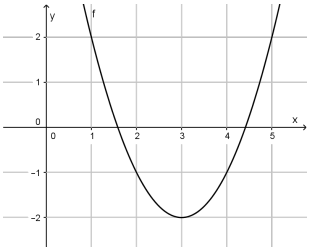


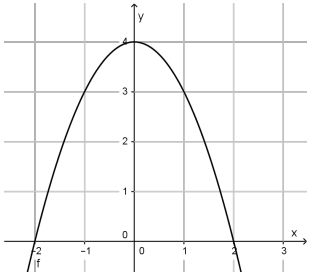
h, i

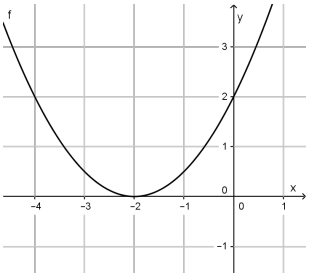


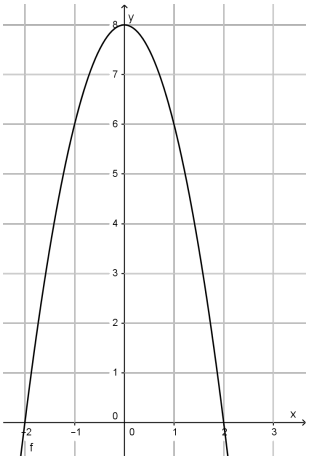
1.4.7. Feladat 6 perc

A következő ábrákon másodfokú függvények grafikonjai láthatók. Állapítsd meg a hozzárendelési utasításokat!

a) 

b) 

c) 

d) 

M:
a) $(x-3)^2-2$ b) $-x^2+4$ c) $\frac{1}{2}(x+2)^2$ d) $-2x^2+8$

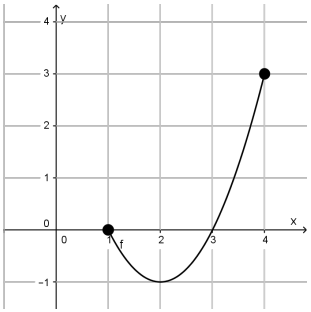
1.4.8. Feladat 30 perc

Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket:
a) $f:\ [1;4] \to \mathbb{R}\ x \mapsto (x-2)^2-1$

b+) $f:\ [1;4] \to \mathbb{R}\ x \mapsto |(x-2)^2 - 1|$
c) $f:]-5;0[\to \mathbb{R}\ x \mapsto (x+3)^2 - 4$
d) $f:]-5;0[\to \mathbb{R}\ x \mapsto |(x+3)^2 - 4|$

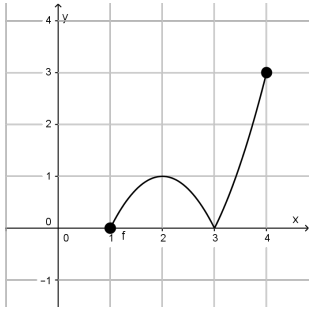
M:

a)



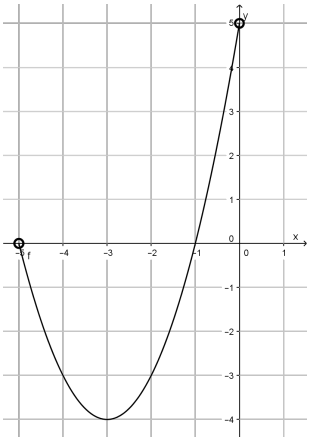
ÉT: $[1;4]$, ÉK: $[-1;3]$, ZH: 1 és 3, $\nearrow$: $[2;4]$, $\searrow$: $[1;2]$ Min. h.: 2, Min. é.: -1 Max. h.: 1 és 4, Max. é.: 0 és 3

b)

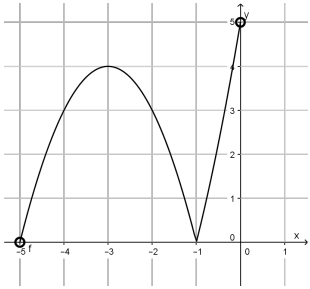


ÉT: $[1;4]$, ÉK: $[0;3]$, ZH: 1 és 3, $\nearrow$: $[3;4]$; $[1;2]$, $\searrow$: $[2;3]$ Min. h.: 1 és 3, Min. é.: 0 és 0, Max. h.: 2 és 4, Max. é. 1 és 3

c)



ÉT: $]-5;0[$, ÉK: $[-4;5[$, ZH: -1, $\nearrow$: $[-3;0[$, $\searrow$: $]-5;-3]$ Min. h.: -3, Min. é.: -4

d) 

ÉT: $]-5;0[$, ÉK: $[0;5[$, ZH: -1, $\nearrow$: $[-1;0[$; $]-5;-3]$, $\searrow$: $[-3;-1]$ Min. h.: -1, Min. é.: 0, Max. h.: -3, Max. é.: 4

1.4.9. Parabola csúcsa és szimmetria tengelye

Az $y = p(x-q)^2 + r$ $(p \neq 0)$ parabola
-csúcsának koordinátái: (q, r)
-szimmetria tengelyének az egyenlete: $x = q$
-ha $p > 0$, akkor minimum helye: q, minimum értéke: r
-ha $p < 0$, akkor maximum helye: q, maximum értéke: r

1.4.10. Feladat - teljes négyzetté alakítás; a parabola csúcspontja; a parabola szimmetria tengelye; 24 perc

a)
(i) Fejezd ki az $x^2-8x+12$ másodfokú kifejezést $(x \pm p)^2 \pm q$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = x^2 - 8x + 12$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^2 - 8x + 12$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum vagy maximum) helyét és értékét!
b)
(i) Fejezd ki az $x^2+6x+20$ másodfokú kifejezést $(x \pm p)^2 \pm q$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = x^2 + 6x + 20$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^2 + 6x + 20$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum

vagy maximum) helyét és értékét!
c)
(i) Fejezd ki a $2x^2 - 20x + 43$ másodfokú kifejezést $p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 - 20x + 43$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2x^2 - 20x + 43$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum vagy maximum) helyét és értékét!
d)
(i) Fejezd ki a $2x^2 + 4x + 11$ másodfokú kifejezést $p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 + 4x + 11$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2x^2 + 4x + 11$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum vagy maximum) helyét és értékét!

e)
(i) Fejezd ki a $2x^2 - 28x + 69$ másodfokú kifejezést
$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = 2x^2 - 28x + 69$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto 2x^2 - 28x + 69$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum vagy maximum) helyét és értékét!
f)
(i) Fejezd ki a $-x^2-6x+10$ másodfokú kifejezést
$p(x \pm q)^2 \pm r$ alakban (p és q valós számok).
(ii) Állapítsd meg az $y = -x^2 - 6x + 10$ alakzat (V) csúcspontjának a koordinátáit.
(iii) Határozd meg a grafikon szimmetria tengelyének egyenletét.
(iv) Állapítsd meg, hogy minimuma vagy maximuma van-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto -x^2 - 6x + 10$ függvénynek? Add meg a szélsőérték (minimum vagy maximum) helyét és értékét!

M:
a) (i) $(x-4)^2-4$; (ii) $V(4,-4)$; (iii) $x=4$; (iv) Min. h.: 4, Min. é.: -4
b) (i) $(x+3)^2+11$; (ii) $V(-3,11)$; (iii) $x=-3$; (iv) Min. h.: -3, Min. é.: 11
c) (i) $2(x-5)^2-7$; (ii) $V(5,-7)$; (iii) $x=5$; (iv) Min. h.: 5, Min. é.: -7
d) (i) $2(x+1)^2+9$; (ii) $V(-1,9)$; (iii) $x=-1$; (iv) Min. h.: -1, Min. é.: 9
e) (i) $2(x-7)^2-29$; (ii) $V(7,-29)$; (iii) $x=7$; (iv) Min. h.: 7, Min. é.: -29
f) (i) $-(x+3)^2+19$; (ii) $V(-3,19)$; (iii) $x=-3$; (iv) Max. h.: -3, Max. é.: 19

1.4.11. Példa+ - szélsőérték számítás

100 m hosszú kerítéssel szeretnénk egy téglalap alakú területet körülkeríteni úgy, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait? Mennyi lesz ekkor a terület?

M: Vezessünk be ismeretleneket, legyenek a téglalap oldalai x és y. Ekkor $2x + 2y = 100$ és a $T = xy$ mennyiséget szeretnénk maximalizálni. Az első egyenletből kifejezzük y-t[3]: $y = 50 - x$ és beírjuk a második egyenletbe, ekkor azt kapjuk, hogy $T = x(50 - x) = -x^2 + 50x$. Ez egy másodfokú kifejezés, amit teljes négyzetre hozva megállapíthatjuk a maximum helyet és értéket: $T = -(x-25)^2+625$, a maximum hely 25, a maximum érték pedig 625. Tehát akkor kaphatunk maximális területű téglalapot, ha az oldalak 25 méteresek, ekkor a terület 625 m^2 lesz.

1.4.12. Feladat+ 8 perc

Egy hosszú ház fala mentén szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú területet Frakk részére. 60 m kerítésünk van, hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, ha a lehető legnagyobb területet szeretnénk elkeríteni? (A ház fala mentén természetesen nem kell kerítés.) Mennyi lesz ez a terület?

[3]Egy másik gondolatmenet: Ha a téglalap kerülete 100 m, akkor az oldalak összege 50 m és így az egyik oldal x a másik $50 - x$.

M:
A téglalap oldalai: 15 m, 30 m, 15 m (a háznál 30 m), a maximális terület 450 m^2.

1.4.13. Feladat+++

Arany Dániel matematika verseny (2015, Kezdők I–II. kategória, II. forduló, 5. feladat a 4. oldalon)

1.5. Négyzetgyök függvény

1.5.1. Definíció - négyzetgyök

Valamely nemnegatív x szám négyzetgyökén azt a nemnegatív számot értjük, amelynek a négyzete x. Jelölés: $\sqrt{x}$
Megjegyzés: A definíció alapján $\sqrt{x^2} = |x|$. Ennek egy alkalmazása: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$.

1.5.2. Feladat 20 perc

Állapítsd meg, hogy az alábbi kifejezések mely valós számokra értelmezhetőek:

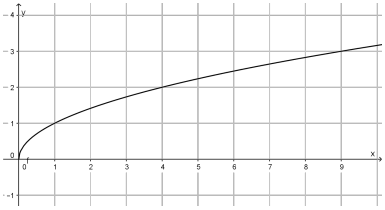
a) $\sqrt{x-2}$ b) $\sqrt{2x+8}$ c) $\sqrt{x^2}$ d) $\sqrt{x^2+1}$ e) $\sqrt{-x^2}$ f) $\sqrt{-x^2-1}$ g) $\sqrt{x^2-1}$ h) $\sqrt{x^2-4}$ i) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$ j) $\sqrt{|x|}$ k) $\sqrt{\sqrt{x-1}}$

M:
a) $[2;\infty[$ b) $[-4;\infty[$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}$ e) $\{0\}$ f) $\emptyset$ g) $]-\infty;-1]\cup[1;\infty[$ h) $]-\infty;-2]\cup[2;\infty[$ i) $]-\infty;-2[\cup]2;\infty[$ j) $\mathbb{R}$ k) $[1;\infty[$

1.5.3. Feladat 6 perc

Táblázat készítésével ábrázold az $f : [0;\infty[\to\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ négyzetgyök függvényt, majd jellemezd!

M:

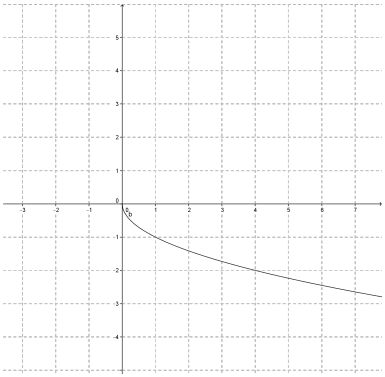


ÉT: $[0;\infty[$, ÉK: $[0;\infty[$, ZH: 0, $\nearrow$: $[0;\infty[$, Min. h.: 0 Min. é.: 0

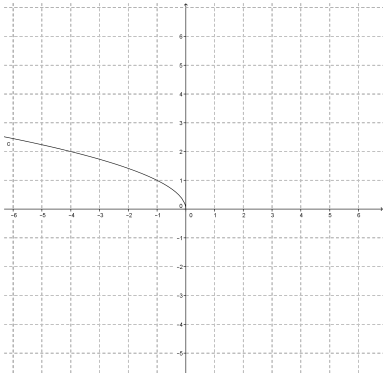
1.5.4. Feladat - négyzetgyök függvény; 15 perc

Ábrázold az alábbi függvények grafikonját (az értelmezési tartomány a valós számok lehető legbővebb részhalmaza):
a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{-x}$; c) $y = \sqrt{x-3}$; d) $y = \sqrt{x} - 2$; e) $y = \sqrt{x+1}$; f) $y = \sqrt{x} - 4$; g) $y = 2\sqrt{x}$; h) $y = \sqrt{\frac{1}{3}x}$;

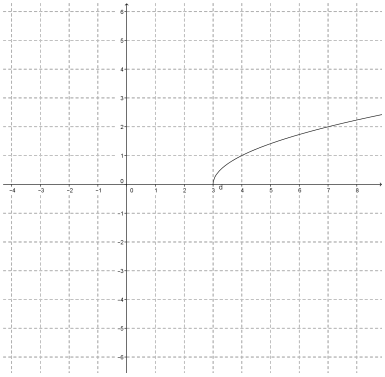
M:

a) 

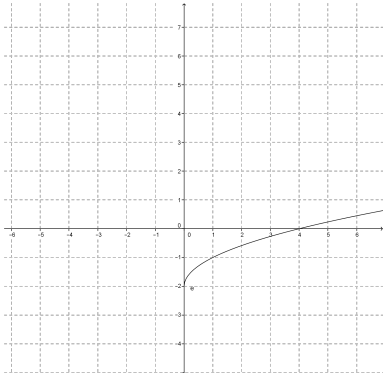
b)



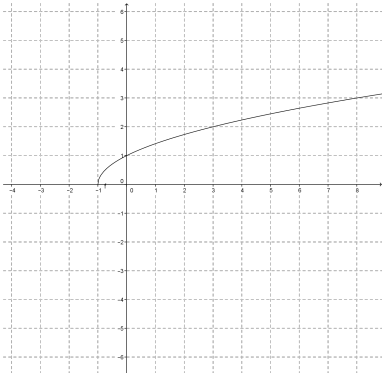
c)



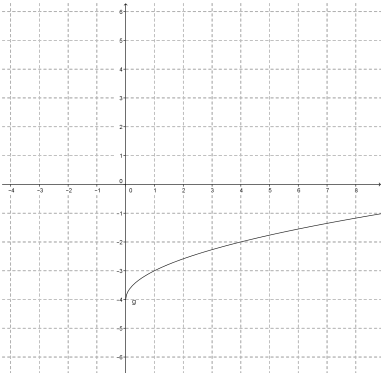
d)



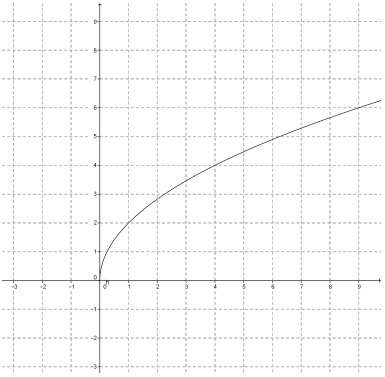
e)

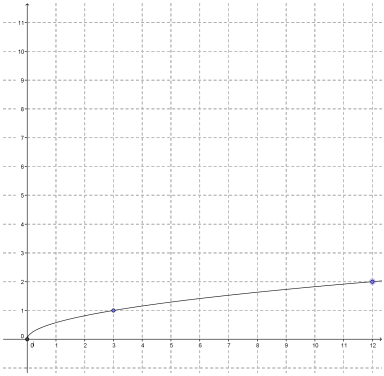


f)



g)



h) 

1.5.5. Tétel-transzformációk

Az előző feladat alapján a négyzetgyök függvényt transzformációval is ábrázolhatjuk. Két új transzformációt ismerhetünk itt meg. A szabályok:

1. Az $\sqrt{x}+a$ (ahol $a>0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját felfelé toljuk az y tengely mentén a értékkel. Az $\sqrt{x}-a$ (ahol $a>0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját lefelé toljuk az y tengely mentén a értékkel.

2. Az $\sqrt{x-a}$ (ahol $a>0$) függvény grafikonját

úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját jobbra toljuk az x tengely mentén a értékkel. Az $\sqrt{x+a}$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját balra toljuk az x tengely mentén a értékkel.

3. Az $a \cdot \sqrt{x}$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját y irányban nyújtjuk a-szorosára. Más szóval az x tengelytől a távolságokat a-szorosára változtatjuk.

4. A $-\sqrt{x}$ függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre.

5. A $\sqrt{-x}$ függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját tükrözzük az y tengelyre.

6. A $\sqrt{a \cdot x}$ (ahol $a > 0$) függvény grafikonját úgy is megrajzolhatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját x irányban nyújtjuk $\frac{1}{a}$-szorosára. Más

szóval az y tengelytől a távolságokat $\frac{1}{a}$-szorosára változtatjuk.
Megjegyzés1: Több transzformáció esetén a javasolt sorrend: 6-5-2-3-4-1

Megjegyzés2: A $\sqrt{ax-b}$ (tfh. $a > 0$ és $b > 0$ konstansok) függvény ábrázolásához először átalakítást végzünk: $\sqrt{ax-b} = \sqrt{a \cdot (x - \frac{b}{a})}$. Ezután meglepő módon elsőként az $\frac{1}{a}$-szoros, x tengely menti nyújtást, majd a $\frac{b}{a}$ mértékű eltolást kell végrehajtani.

1.5.6. Feladat - négyzetgyök függvény transzformációja; 12 perc

Az $y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x)$ függvény grafikonját
a) tükrözzük az x tengelyre. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)
b) tükrözzük az y tengelyre. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)
c) eltoljuk az y tengely mentén $+5$ egységgel. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek

a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)
d) eltoljuk az x tengely mentén -3 egységgel. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)
e) 4-szeresére nyújtjuk az x tengely mentén. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)
f) 3-szorosra nyújtjuk az y tengely mentén. Add meg, hogy az így kapott görbe mely függvénynek a grafikonja. (ÉT. és hozzárendelési utasítás)

M:
a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{-x}$; c) $y = \sqrt{x} + 5$; d) $y = \sqrt{x+3}$; e) $y = \sqrt{\frac{1}{4}x}$; f) $y = 3\sqrt{x}$

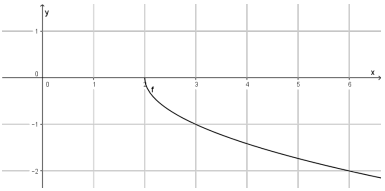
1.5.7. Feladat 20 perc

Ábrázold az alábbi függvényeket transzformáció alkalmazásával:
a) $f : [2; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto -\sqrt{x-2}$
b) $f :]-\infty; 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{-x} - 1$
c) $f : [0; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\sqrt{x}$
d) $f : [0; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{2x}$

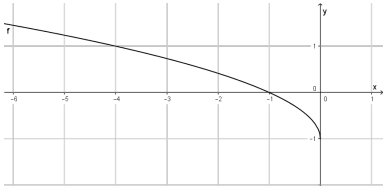
e++) $f:\ [1;\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{2x-2}$
f++) $f:\ [-3;\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x^2+6x+9}$

M:

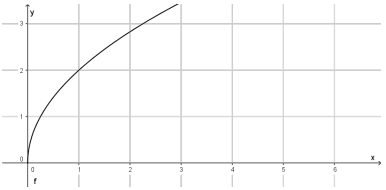
a)



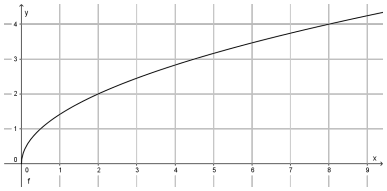
b)



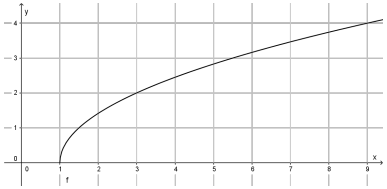
c)



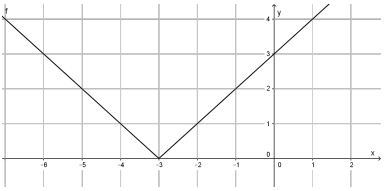
d)



e)



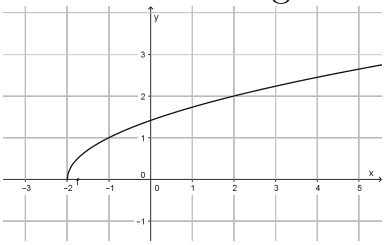
f)



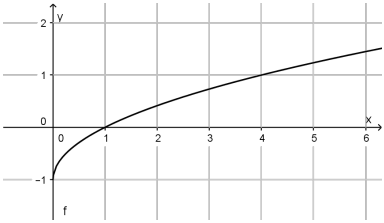
1.5.8. Feladat 12 perc

Az alábbi grafikonok négyzetgyök függvényekhez tartoznak. Add meg ezen függvényeket!

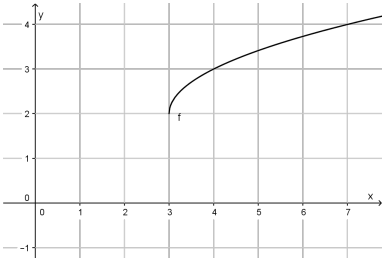
a)



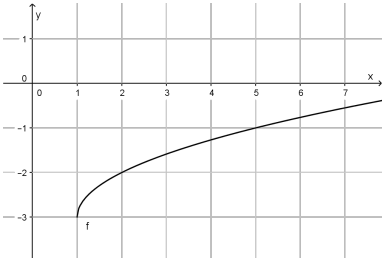
b)



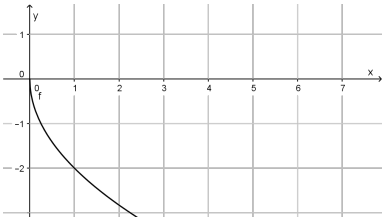
c)



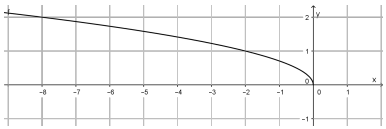
d)



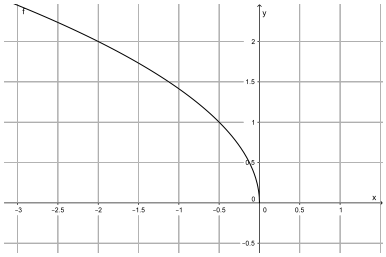
e)



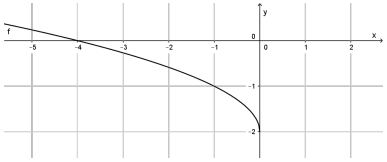
f)



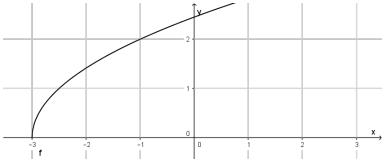
g)



h)



i++)



M:

a) $f : [-2; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x+2}$

b) $f : [0; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} - 1$

c) $f : [3; \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x-3} + 2$

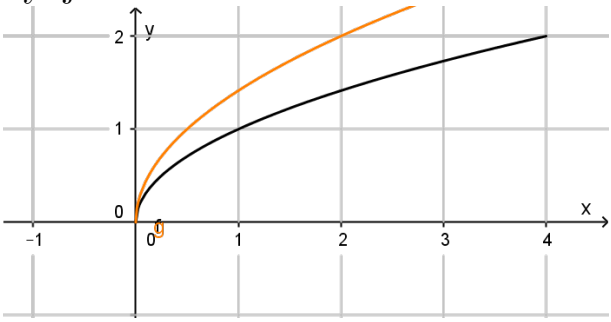
d) $f:\ [1;\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x-1}-3$
e) $f:\ [0;\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto-2\cdot\sqrt{x}$
f) $f:\ ]-\infty;0]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{-\frac{1}{2}x}$
g) $f:\ ]\infty;0]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{-2\cdot x}$
h) $f:\ ]-\infty;0]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{-x}-2$
i) $f:\ [-3;\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{2x+6}$

1.6. A transzformációk áttekintése

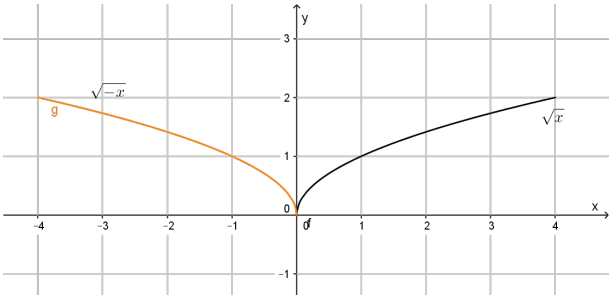
1.6.1. Függvény transzformáció

Az $f(x)$ függvény grafikonját az alábbi függvény grafikonjába átvivő transzformáció:

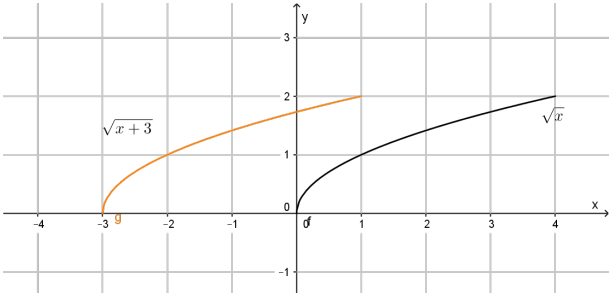
$f(ax)$, ahol $a>0$: x tengely menti $\frac{1}{a}$-szoros nyújtás



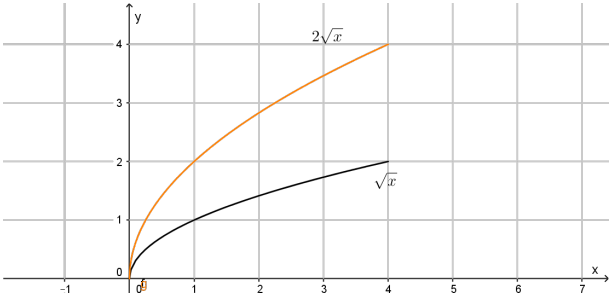
$f(-x)$: tükrözés az y tengelyre



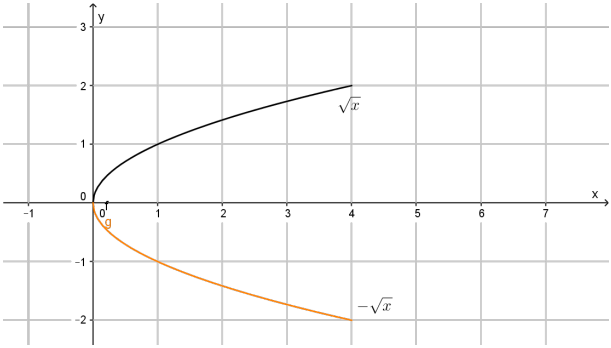
$f(x-a)$, ahol $a > 0$: x tengely menti eltolás a értékkel pozitív irányban ("késik" a függvény)
$f(x+a)$, ahol $a > 0$: x tengely menti eltolás a értékkel negatív irányban ("siet" a függvény)



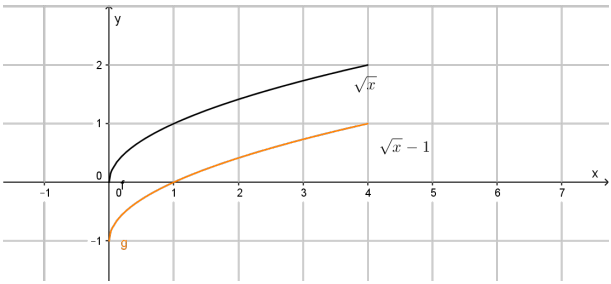
$af(x)$, ahol $a > 0$: y tengely menti a-szoros nyújtás



$-f(x)$: tükrözés az x tengelyre

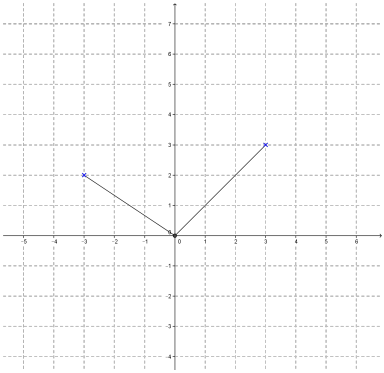


$f(x) + a$, ahol $a > 0$: y tengely menti eltolás a értékkel pozitív irányban
$f(x) - a$, ahol $a > 0$: y tengely menti eltolás a értékkel negatív irányban



megjegyzés: Több transzformáció esetén a fenti sorrendet érdemes betartani.

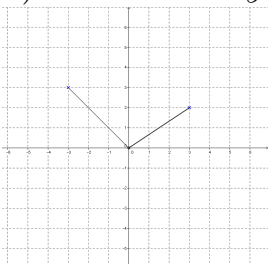
1.6.2. Feladat - függvény transzformáció; 15 perc



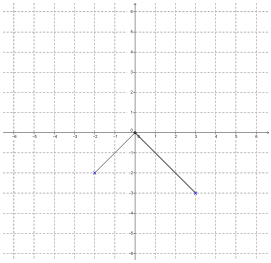
Az $y = f(x)$ függvény grafikonját lásd fenn, az értelmezési tartomány $-3 \leq x \leq 3$.
a) Ábrázold az $y = f(-x)$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $-3 \leq x \leq 3$).

b) Ábrázold az $y = -f(x)$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $-3 \leq x \leq 3$).
c) Ábrázold az $y = f(x)+2$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $-3 \leq x \leq 3$).
d) Ábrázold az $y = f(x-3)$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $0 \leq x \leq 6$).
e) Ábrázold az $y = 2f(x)$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $-3 \leq x \leq 3$).
f) Ábrázold az $y = f(\frac{1}{2}x)$ függvény grafikonját (az értelmezési tartomány: $-6 \leq x \leq 6$).

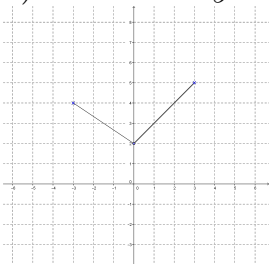
M:
a) tükrözés az y tengelyre:



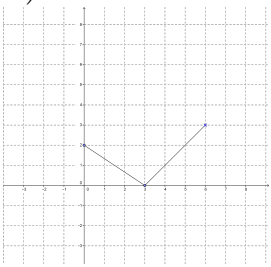
b) tükrözés az x tengelyre:



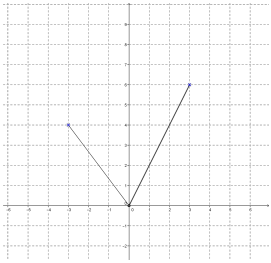
c) eltolás az y tengely mentén +2-vel:



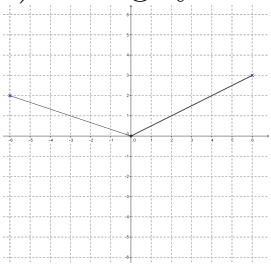
d) eltolás az x tengely mentén +3-mal:



e) y tengely menti kétszeres nyújtás:



f) x tengely menti kétszeres nyújtás:



1.7. Lineáris törtfüggvény

1.7.1. Definíció - lineáris törtfüggvény

Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d valós konstansok, $c \neq 0$, $ab \neq 0$) függvényt lineáris törtfüggvénynek nevezzük.

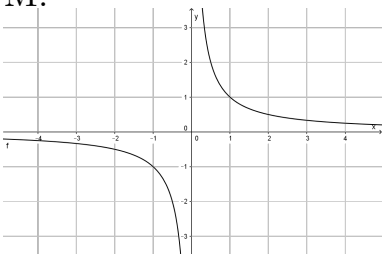
megjegyzés: az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a > 0$, konstans) függvényt fordított arányosság függvényének

is nevezzük.

1.7.2. Feladat 5 perc

Ábrázold és jellemezd az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt!

M:



Jellemzés: ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ZH: -, $\searrow$: $]-\infty; 0[$, $[0; \infty[$, a függvény páratlan
megjegyzés1: A fenti grafikon hiperbola.
megjegyzés2: Az ábrázolásnál a kulcsszó a reciprok.

1.7.3. Példa

Az alábbi kifejezéseket hozzuk $\frac{a}{x \pm b} \pm c$ alakra, ahol a, b, c valós számok:

a) $\frac{x+1}{x-2}$ $(x \neq 2)$

M: A számlálóba beírjuk a nevezőt és korrigálunk, hogy igaz legyen az egyenlőség: $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2}$, most pedig tagonként osztunk és alkalmazzuk az összeadás kommutatív (felcserélhetőség) tulajdonságát: $1 + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$ és készen is vagyunk.
megjegyzés1: Ezt az átalakítást a lineáris törtfüggvény transzformációval történő ábrázolásához használhatjuk.

megjegyzés2: Az átalakítás arra is használható, hogy megmondjuk, hogy az eredeti kifejezés, milyen $x \in \mathbb{Z}$ számokra ad egész értéket. Ennek vizsgálatát az olvasóra bízzuk.

b) $\frac{-2x-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$

M: Ismét leírjuk a számlálóba a nevezőt $\frac{-2x-1}{x+1} = \frac{?(x+1)?}{x+1}$. Az első kérdőjel helyére -2-t kell írnunk, a második helyére pedig 1-et, így kapjuk: $\frac{(-2)(x+1)+1}{x+1}$, innen pedig tagonként osztva és felcserélve a kapott tagokat adódik a megoldás: $\frac{1}{x+1} - 2$.

1.7.4. Feladat 12 perc

Az alábbi kifejezéseket hozd $\frac{a}{x\pm b} \pm c$ alakra, ahol a, b, c valós számok:

a+) $\frac{x-3}{x-1}$ $(x \neq 1)$ b+) $\frac{x+5}{x+3}$ $(x \neq -3)$

c++) $\frac{2x+1}{x+2}$ $(x \neq -2)$ d++) $\frac{3x-5}{x-3}$ $(x \neq 3)$

M:
a) $\frac{-2}{x-1} + 1$ b) $\frac{2}{x+3} + 1$ c) $\frac{-3}{x+2} + 2$ d) $\frac{4}{x-3} + 3$

1.7.5. Feladat++ 12 perc

Az előző feladat eredményét felhasználva add meg az összes olyan x értéket, melyre teljesül, hogy:
a) $\frac{x-3}{x-1} \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{x+5}{x+3} \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{2x+1}{x+2} \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{N}$

d) $\frac{3x-5}{x-3} \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$

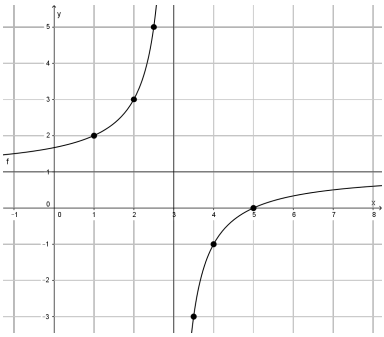
M:
a) $-1;\ 0;\ 2;\ 3$ b) $-5; -4; -2; -1$ c) 1 d) $-1;\ 1;\ 4;\ 5;\ 7$

1.7.6. Példa

Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{2}{x-3} + 1$ függvény grafikonját. Adjuk meg az értékkészletét.

M: Az ábrázolást transzformációval végezzük. Elsőként az origót toljuk el jobbra hárommal és felfelé eggyel, sőt megrajzoljuk a képzeletbeli új koordináta tengelyeket is. Ezt követően ebből a képzeletbeli új origóból a következő lépéseket hajtjuk végre (a szabály az, hogy a reciprokát vesszük annak a számnak, amennyit vízszintesen lépünk és megszorozzuk -2-vel és az így kapott számmal lépünk felfelé ill. lefelé attól függően, hogy pozitív vagy negatív):
egyet jobbra és kettőt le
felet jobbra és négyet le
kettőt jobbra és egyet le

egyet balra és kettőt fel
felet balra és négyet fel
kettőt balra és egyet fel



ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

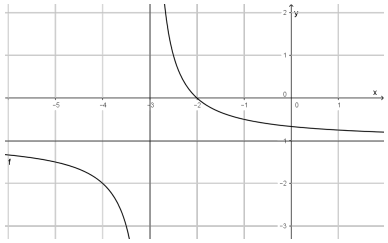
1.7.7. Feladat 15 perc

Ábrázold az alábbi függvények grafikonját, majd add meg az értékkészletét:
a) $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x-4} + 2$
b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x+3} - 1$
c+) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{x+2} + 1$
d+) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2}{x-1} - 2$

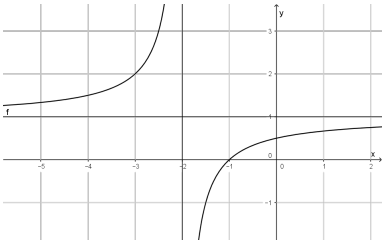
M:

a)

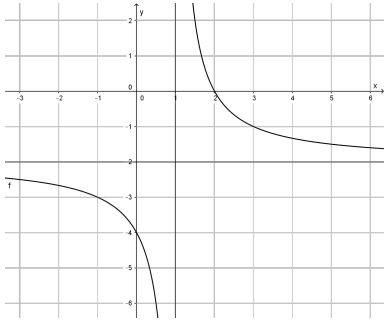
ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) 

ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) 

ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) 

ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

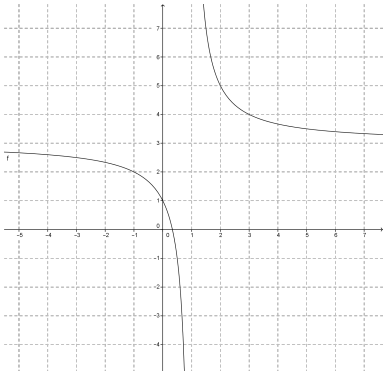
1.7.8. A hiperbola asszimptotái

Az $y = \frac{a}{x-b} + c$ ($x \neq b$, $a \neq 0$) hiperbola asszimptotáinak egyenletei: $x = b$ és $y = c$.

1.7.9. Feladat - hiperbola; 6 perc

(i) Ábrázold H görbét, melynek egyenlete: $y = \frac{2}{x-1} + 3$, $x \neq 1$.
(ii) Add meg annak a pontnak a koordinátáit, ahol H metszi az x tengelyt.
(iii) Állapítsd meg H asszimptotáinak egyenletét.

Tipp: Lásd 1.7.8 itt: 100.
M:
(i)



(ii) $(\frac{1}{3}, 0)$;

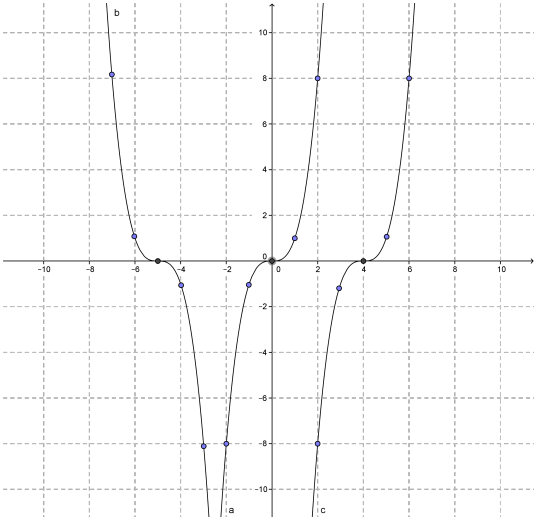
(iii) $x = 1$; $y = 3$;

1.8. Egyéb függvények

1.8.1. Feladat - harmadfokú függvény; 12 perc

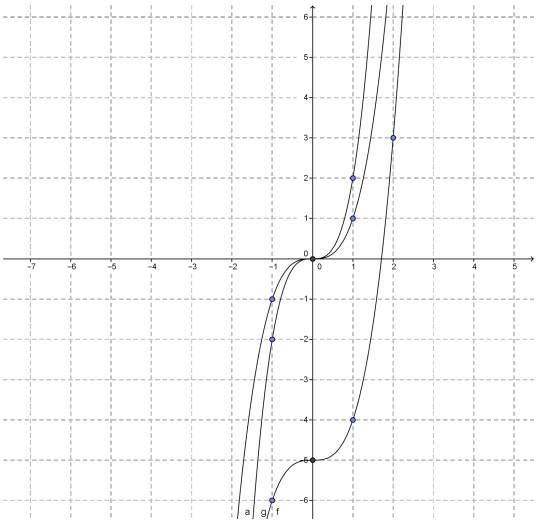
Ábrázold az alábbi függvények grafikonjait. (az értelmezési tartomány minden esetben a valós számok halmaza) Határozd meg, hogy mely geometriai transzformáció viszi át az $a(x) = x^3$ függvény grafikonját $f(x)$ grafikonjába.
a) $a(x) = x^3$; b) $f(x) = -(x+5)^3$; c) $f(x) = (x-4)^3$; d) $f(x) = x^3 - 5$; e) $f(x) = 2x^3$

M:



a, b, c

a) identikus transzformáció (minden pont képe önmaga); b) először tükrözés az x tengelyre, majd eltolás x tengely mentén negatív irányban 5 egységgel; c) eltolás x tengely mentén pozitív irányban 4 egységgel



a, d, e

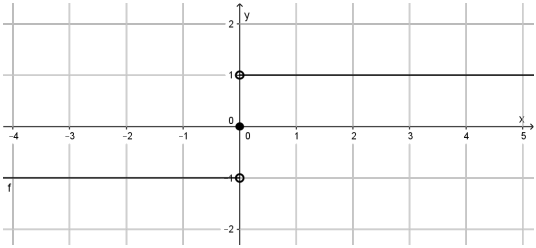
d) eltolás y tengely mentén negatív irányban 5 egységgel; e) 2- szeres nyújtás az y tengely mentén;

1.8.2. Feladat+ 3 perc

Ábrázold az alábbi függvényt, majd állapítsd meg az értékkészletét:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

M:



ÉK: $\{-1; 0; 1\}$
Megjegyzés: Ezt a függvényt előjel vagy szignum függvénynek nevezzük.

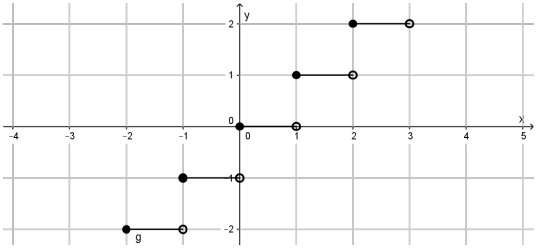
1.8.3. Definíció - egészrész

Egy tetszőleges valós szám egész részén a nála nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat értjük. Jelölése: $[x]$.
pl. [0,3]=0; [1,4]=1; $[-0,2] = -1$

1.8.4. Feladat+ 3 perc

Ábrázold, az alábbi, egészrész függvényt:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x]$

M:



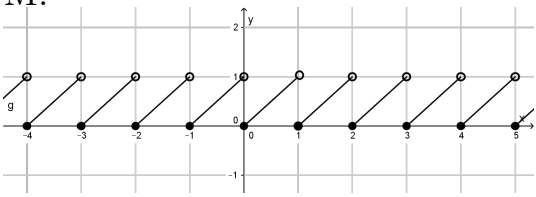
1.8.5. Definíció - törtrész

Egy x tetszőleges valós szám törtrészén az $x-[x]$ számot értjük. Jelölés: $\{x\}$.
pl.: $\{0,4\}=0,4$; $\{1,3\}=0,3$; $\{-1,4\}=0,4$;

1.8.6. Feladat+ 3 perc

Ábrázold, az alábbi, törtrész függvényt:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}$

M:



1.8.7. Feladat 2 perc

Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$?[4]

M:
-2 és 10

1.8.8. Feladat 4 perc

Adja meg az $x \mapsto x^2 + 10x + 21$ másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! [5]

M:
minimum hely: -5, minimum érték: -4

1.8.9. Feladat 9 perc

Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá:
$f(x) = 5x + 5,25$ és $g(x) = x^2 + 2x + 3,5$

[4]Érettségi feladat (Közép, 2013 okt. 2.; 2 pont)
[5]Érettségi feladat (Közép, 2013 máj. 7.; 4 pont)

a) Számítsa ki a táblázatok hiányzó értékeit!

x	3
$f(x)$	

x	
$g(x)$	2,5

b) Adja meg a g függvény értékkészletét!
[6]

M:
a)

x	3
$f(x)$	20,25

x	-1
$g(x)$	2,5

b) ÉK: $[2,5;\infty[$

1.8.10. Feladat 3 perc

Adja meg a $2x+y=4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! [7]

M:
$M(2;0)$; $m=-2$

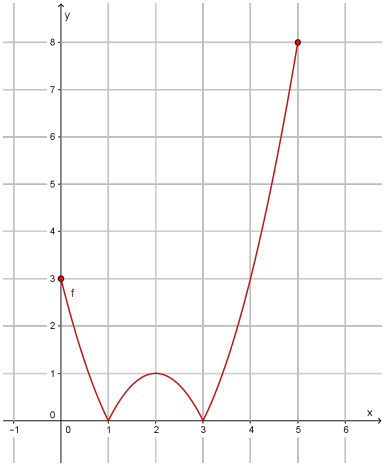
[6] Érettségi feladat (Közép, 2012 okt. 15. a és b; 3-3 pont)
[7] Érettségi feladat (Közép, 2013 máj. 6.; 3 pont)

1.8.11. Feladat++

a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az
$f : [0; 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt!
b) Tekintsük az $|(x - 2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k függvényében!
c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6; 6[$ intervallumon!
d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! [8]

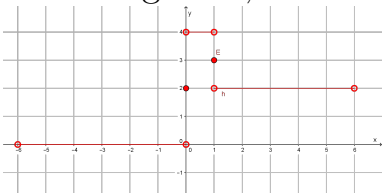
M:

a)



[8] Érettségi feladat (Emelt, 2011 okt. 8.; 5-7-2-2 pont)

b) Ha $k < 0$, akkor nincs megoldás; ha $k = 0$ vagy $k > 1$, akkor 2 megoldás; ha $0 < k < 1$, akkor 4 megoldás; ha $k = 1$, akkor 3 megoldás

c) 

d) ÉK: $\{0; 2; 3; 4\}$

1.8.12. Feladat+++

Arany Dániel matematika verseny (2010 Haladók I. kategória, I. forduló) 2. oldal 4. feladata

Tartalomjegyzék