Matematika 9
Tankönyv és feladatgyűjtemény

Juhász László
matematika és fizika szakos középiskolai tanár

II. fejezet (kb. 18 tanóra)

*

2015. november 1.

*Ez a logó Dittrich Katalin ötlete alapján született.

Ennek a fejezetnek a főbb részei:
hatványozás, nevezetes azonosságok, számelmélet, műveletek algebrai törtkifejezésekkel (részletesen lásd a tartalomjegyzéket a fejezet végén)

1. Hatványozás 200 perc

1.1. A hatványozás fogalma

1.1.1. Definíció - hatványozás fogalma

Ha a kitevő egy: $a^1 = a$, vagyis bármely szám első hatványa önmaga.
Ha a kitevő egynél nagyobb egész szám:
$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n db tényező)
Ha a kitevő nulla: ha $a \neq 0$ akkor $a^0 = 1$ ($0^0 = -$), vagyis a nulla kivételével bármely szám nulladik hatványa egy.
-negatív kitevő: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, ahol $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$
megjegyzés1: a -1 kitevő reciprokot[1] jelent
megjegyzés2: a műveleti sorrendben a hatványozást

[1] Egy szám reciproka az a szám, amellyel megszorozva egyet kapunk. Ezért pl. -2 reciproka $-\frac{1}{2}$.

előbb kell elvégezni, mint a szorzást, ezért $-3^2 = -9$, viszont a zárójel ezt természetesen módosítja: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.

1.1.2. Feladat 6 perc

Számold ki az alábbi hatványok értékét:
a) 5^2 b) $(-5)^2$ c) -5^2 d) 5^3 e) $(-5)^3$ f) -5^3 g) 2^3 h) $(-2)^3$ i) -2^3 j) $(-4)^2$ k) $(-4)^3$ l) $(-6)^2$ m) $(-6)^3$ n) $(-7)^2$ o) 95^1 p) 95^0 q) 123^0 r) 123^1

M:
a) 25 b) 25 c) -25 d) 125 e) -125 f) -125 g) 8 h) -8 i) -8 j) 16 k) -64 l) 36 m) -216 n) 49 o) 95 p) 1 q) 1 r) 123

1.1.3. Feladat 5 perc

Számold ki az alábbi hatványok értékét:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ d) 2^{-1} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

f) 3^{-1} g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ j) $(-2)^{-1}$

k) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$ l) $(-3)^{-1}$

M:
a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{1}{3}$ g) -2 h) $-\frac{3}{2}$ i) -3
j) $-\frac{1}{2}$ k) $-\frac{5}{2}$ l) $-\frac{1}{3}$

1.1.4. Feladat 9 perc

Számold ki az alábbi hatványok értékét:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ d) 2^{-2} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

f) 3^{-2} g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ j) $(-2)^{-2}$

k) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$ l) $(-3)^{-2}$

Tipp: Egy reciprokképzést és egy négyzetre emelést kell végrehajtani tetszőleges sorrendben.
M:
a) 4 b) $\frac{9}{4}$ c) 9 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{25}{4}$ f) $\frac{1}{9}$ g) 4 h) $\frac{9}{4}$ i) 9 j) $\frac{1}{4}$
k) $\frac{25}{4}$ l) $\frac{1}{9}$

1.1.5. Feladat 10 perc

Számold ki az alábbi hatványok értékét:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ d) 2^{-3} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

f) 3^{-3} g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ j) $(-2)^{-3}$

k) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$ l) $(-3)^{-3}$

Tipp: Egy reciprokképzést és egy köbre (harmadik hatványra) emelést kell végrehajtani tetszőleges sorrendben.
M:
a) 8 b) $\frac{27}{8}$ c) 27 d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{125}{8}$ f) $\frac{1}{27}$ g) -8 h) $-\frac{27}{8}$ i) -27 j) $-\frac{1}{8}$ k) $-\frac{125}{8}$ l) $-\frac{1}{27}$

1.1.6. Feladat 9 perc

Számold ki az alábbi hatványok értékét:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ d) 2^{-4} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$

f) 3^{-4} g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$ j) $(-2)^{-4}$

k) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$ l) $(-3)^{-4}$

M:
a) 16 b) $\frac{81}{16}$ c) 81 d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{625}{16}$ f) $\frac{1}{81}$ g) 16 h) $\frac{81}{16}$ i) 81 j) $\frac{1}{16}$ k) $\frac{625}{16}$ l) $\frac{1}{81}$

1.2. A hatványozás azonosságai

1.2.1. Tétel - a hatványozás öt azonossága

I. Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a közös alapot felemeljük az egyes kitevők összegére.
Betűkkel: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
pl.: $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$ vagy az azonosságot fordítva alkalmazva $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot 8$

II. Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük.
Betűkkel: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
pl.: $\frac{3^4}{3^5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ vagy az azonosságot fordítva alkalmazva $5^{x-2} = \frac{5^x}{5^2} = \frac{5^x}{25}$

III. Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.
Betűkkel: $(a^n)^m = a^{nm}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
pl.: $(10^3)^2 = 10^6$; $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$; $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

IV. Szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának a szorzatával. Betűkkel: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
pl.: $(3x)^2 = 9x^2$; $(2x^3)^4 = 16x^{12}$, az azonosságot fordítva alkalmazva: $2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$;
$2^x \cdot 3^x = 6^x$

V. Tört hatványa egyenlő a számláló és nevező hatványának a hányadosával.
Betűkkel: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
pl.: $\left(\frac{x}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{25}$; $\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 = \frac{x^6}{8}$, az azonosság fordított alkalmazása: $\frac{12^{10}}{6^{10}} = 2^{10} = 1024$; $\frac{10^x}{2^x} = 5^x$;

1.2.2. Permanencia elv

A permanent angol szó folytonosságot, állandóságot jelent. Általában a matematikában azt jelenti, hogy egy adott fogalmat úgy terjesztenek ki, hogy a már megismert tételek, azonosságok továbbra is igazak maradjanak. Itt konkrétan a hatványozás esetén arról van szó, hogy az azonosságokat először pozitív egész kitevőre igazolták és a továbbiakban úgy definiálták a nulla és negatív egész kitevőjű hatványt, hogy az azonosságok érvényben maradjanak. Például egyrészt $\frac{a}{a} = 1$, ahol $a \neq 0$ (bármely nullától különböző számot önmagával osztva egyet kapunk), másrészt $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^0$ a II. azonosság alapján. Innen látszik, hogy ha azt szeretnénk, hogy érvényben maradjon a II. azonosság, akkor a nulladik hatványt egynek kell definiálni.

1.2.3. Feladat 5 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 2^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $2^{-2} \cdot 2^7$ c) $2^{-13} \cdot 2^7$ d) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$ e) $2^7 \cdot 2^8$

f) $2^{-4} \cdot 2^{-7}$ g) $2^{-10} \cdot 2^{5}$ h) $2^{9} \cdot 2^{-3}$

Tipp: Alkalmazd az I. azonosságot.
M:
a) 2^7 b) 2^5 c) 2^{-6} d) 2^{-8} e) 2^{15} f) 2^{-11} g) 2^{-5} h) 2^6

1.2.4. Feladat 2 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 3^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $3^8 \cdot 3^5$ b) $3^{-7} \cdot 3^1$ c) $3^{-3} \cdot 3^{-11}$ d) $3^4 \cdot 3^{-12}$ e) $3^{12} \cdot 3^{17}$ f) $3^{-15} \cdot 3^6$ g) $3^{-2} \cdot 3^{-3}$ h) $3^8 \cdot 3^{-2}$

Tipp: Alkalmazd az I. azonosságot.
M:
a) 3^{13} b) 3^{-6} c) 3^{-14} d) 3^{-8} e) 3^{29} f) 3^{-9} g) 3^{-5} h) 3^6

1.2.5. Feladat 3 perc

Alakítsd át a következő kifejezést $p \cdot 2^x$ alakba, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) 2^{x+3} b) 2^{x+2} c) 2^{x+1} d) 2^{x+5} e) 2^{x+4} f) 2^{x+10}

Tipp: Alkalmazd a I. azonosságot visszafelé.
M:
a) $8 \cdot 2^x$ b) $4 \cdot 2^x$ c) $2 \cdot 2^x$ d) $32 \cdot 2^x$ e) $16 \cdot 2^x$ f) $1024 \cdot 2^x$

1.2.6. Feladat 3 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 2^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $\frac{2^6}{2^2}$ b) $\frac{2^6}{2^{-2}}$ c) $\frac{2^{-6}}{2^2}$ d) $\frac{2^{-6}}{2^{-2}}$ e) $\frac{2^{10}}{2^5}$ f) $\frac{2^{10}}{2^{-5}}$ g) $\frac{2^{-10}}{2^5}$ h) $\frac{2^{-10}}{2^{-5}}$

Tipp: Alkalmazd a II. azonosságot.
M:
a) 2^4 b) 2^8 c) 2^{-8} d) 2^{-4} e) 2^5 f) 2^{15} g) 2^{-15} h) 2^{-5}

1.2.7. Feladat 3 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 3^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $\frac{3^8}{3^3}$ b) $\frac{3^8}{3^{-3}}$ c) $\frac{3^{-8}}{3^3}$ d) $\frac{3^{-8}}{3^{-3}}$ e) $\frac{3^{12}}{3^4}$ f) $\frac{3^{12}}{3^{-4}}$ g) $\frac{3^{-12}}{3^4}$ h) $\frac{3^{-12}}{3^{-4}}$

Tipp: Alkalmazd a II. azonosságot.

M:
a) 3^5 b) 3^{11} c) 3^{-11} d) 3^{-5} e) 3^8 f) 3^{16} g) 3^{-16} h) 3^{-8}

1.2.8. Feladat 5 perc

Alakítsd át a következő kifejezést $\frac{2^x}{p}$ alakba, ahol $p \in \mathbb{Z}^+$.
a) 2^{x-3} b) 2^{x-1} c) 2^{x-4} d) 2^{x-5} e) 2^{x-2} f) 2^{x-6} g) 2^{x-10}

Tipp: Alkalmazd a II. azonosságot visszafelé.
M:
a) $\frac{2^x}{8}$ b) $\frac{2^x}{2}$ c) $\frac{2^x}{16}$ d) $\frac{2^x}{32}$ e) $\frac{2^x}{4}$ f) $\frac{2^x}{64}$ g) $\frac{2^x}{1024}$

1.2.9. Feladat 5 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 2^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $(2^2)^5$ b) $(2^{-2})^5$ c) $(2^{-2})^{-5}$ d) $(2^6)^7$ e) $(2^{-7})^8$ f) $(2^{-9})^{-6}$ g) 8^4 h) 4^3 i) 16^7 j) $(32)^{-2}$ k) 1024^{10}

Tipp: Alkalmazd a III. azonosságot.
M:

a) 2^{10} b) 2^{-10} c) 2^{10} d) 2^{42} e) 2^{-56} f) 2^{54} g) 2^{12} h) 2^{6} i) 2^{28} j) 2^{-10} k) 2^{100}

1.2.10. Feladat 5 perc

Add meg a következő műveletek eredményét 3^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$.
a) $(3^3)^7$ b) $(3^9)^{-7}$ c) $(3^{-5})^{-6}$ d) $(3^{10})^2$ e) $(3^{-4})^6$ f) $(3^0)^5$ g) 9^{-4} h) 27^2 i) 81^{10}

Tipp: Alkalmazd a III. azonosságot.
M:
a) 3^{21} b) 3^{-63} c) 3^{30} d) 3^{20} e) 3^{-24} f) 3^0 g) 3^{-8} h) 3^6 i) 3^{40}

1.2.11. Feladat 3 perc

Végezd el az alábbi műveleteket!
a) $(2x)^2$ b) $(4x)^2$ c) $(5x)^3$ d) $(6x)^2$ e) $(5x^4)^3$ f) $(7x^3)^2$ g) $(2x^4)^5$

Tipp: Alkalmazd a IV. azonosságot.
M:
a) $4x^2$ b) $16x^2$ c) $125x^3$ d) $36x^2$ e) $125x^{12}$ f) $49x^6$

g) $32x^{20}$

1.2.12. Feladat 7 perc

Add meg az alábbi számokat olyan hatványok szorzataként, amelyeknek az alapjai prímszámok!
a) 108 b) 288 c) 400 d) 144
Tipp: Végezd el a számok prímtényezős felbontását.

M:
a) $2^2 \cdot 3^3$ b) $2^5 \cdot 3^2$ c) $2^4 \cdot 5^2$ d) $2^4 \cdot 3^2$

1.2.13. Feladat 2 perc

Add meg a következő műveletek eredményét p^x alakban, ahol $p, x \in \mathbb{Z}$ és $p \neq 0$.
a) $2^x \cdot 3^x$ b) $5^x \cdot 7^x$ c) $3^x \cdot 8^x$ d) $9^x \cdot 7^x$

Tipp: Alkalmazd a IV. azonosságot visszafelé.
M:
a) 6^x b) 35^x c) 24^x d) 63^x

1.2.14. Feladat 3 perc

Végezd el az alábbi műveleteket!
a) $(\frac{x}{3})^2$ b) $(\frac{x}{2})^2$ c) $(\frac{x}{5})^2$ d) $(\frac{x^2}{2})^3$ e) $(\frac{3x^4}{5})^3$

Tipp: Alkalmazd az V. azonosságot.
M:
a) $\frac{x^2}{9}$ b) $\frac{x^2}{4}$ c) $\frac{x^2}{25}$ d) $\frac{x^6}{8}$ e) $\frac{27x^{12}}{125}$

1.2.15. Feladat 2 perc

Add meg a következő műveletek eredményét p^x alakban, ahol $p, x \in \mathbb{Z}$ és $p \neq 0$.
a) $\frac{6^x}{3^x}$ b) $\frac{18^x}{6^x}$ c) $\frac{24^x}{4^x}$ d) $\frac{30^x}{3^x}$

Tipp: Alkalmazd az V. azonosságot visszafelé.
M:
a) 2^x b) 3^x c) 6^x d) 10^x

1.2.16. Feladat 16 perc

Számológép használata nélkül határozd meg a következő törtek értékét:
a) $\frac{12 \cdot 216}{18 \cdot 48}$ b)) $\frac{100 \cdot 1000}{40 \cdot 1250}$ c) $\frac{45^3 \cdot 20^4 \cdot 18^2}{180^5}$

Tipp: Végezd el a számok prímtényezős felbontását, majd alkalmazd az előző azonosságokat!
M:
a) 3 b) 2 c) 25

1.2.17. Feladat 6 perc

Add meg a következő műveletek eredményét x^p alakban, ahol $p \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ és $x \neq 0$.
a) $\frac{(x^2)^3 \cdot (x^4)^5}{(x^4)^2 \cdot (x^3)^5}$ b) $\frac{(x^3)^{-4} \cdot (x^{-4})^{-5}}{(x^8)^{-2} \cdot (x^{-2})^{-7}}$ c) $\frac{(x^{-4})^5 \cdot (x^{-6})^2}{(x^3)^{-7} \cdot (x^{-4})^0}$

Tipp: Alkalmazd az előző azonosságokat!
M:
a) x^3 b) x^{10} c) x^{-11}

1.2.18. Feladat 15 perc

Add meg a következő műveletek eredményét $x^p \cdot y^q$ alakban, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$ és $x, y \neq 0$.

a) $\frac{(x^2 \cdot y^3)^4 \cdot (x^5 \cdot y^6)^7}{(x^8 \cdot y^9)^3 \cdot (x^4 \cdot y^2)^5}$

b) $\frac{(x^{-5} \cdot y^3)^{-2} \cdot (x^6 \cdot y^4)^{-5}}{(x^0 \cdot y^7)^{-4} \cdot (x^{-6} \cdot y^2)^{-1}}$

c) $\frac{(x^{-4}\cdot y^{-5})^{-3}\cdot(x^{-2}\cdot y^{4})^{-1}}{(x^{5}\cdot y^{-6})^{3}\cdot(x^{4}\cdot y^{7})^{-8}}$

Tipp: Alkalmazd az előző azonosságokat!
M:
a) $x^{-1}\cdot y^{17}$ b) $x^{-26}\cdot y^{4}$ c) $x^{31}\cdot y^{85}$

1.2.19. Feladat 16 perc

Számológép használata nélkül állapítsd meg, hogy az alábbi számpárok közül melyik a nagyobb?
a) 2^{-1} vagy 3^{-1} b) $\frac{5}{2^{2016}}$ vagy $\frac{9}{2^{2017}}$

c) $\frac{2}{2^{2020}}$ vagy $\frac{17}{2^{2023}}$ d) 10^{8} vagy $480\cdot 50^{4}\cdot 5^{2}$

Tipp1: Alkalmazd a hatványozás definícióit és azonosságait!
Tipp2: Hozz közös nevezőre a b) és c) feladatnál!
Tipp3 a d) részhez: Vizsgáld a két szám hányadosát!
M:
a) $2^{-1}>3^{-1}$ b) $\frac{5}{2^{2016}}>\frac{9}{2^{2017}}$

c) $\frac{2}{2^{2020}}<\frac{17}{2^{2023}}$ d) $10^{8}<480\cdot 50^{4}\cdot 5^{2}$

1.3. Normál alak

A tudományos életben a nagyon nagy és a nagyon kicsi számok kezelésére találták ki azért, hogy ne kelljen sok nullát leírni.

1.3.1. Definíció

Az x nemnulla valós szám normál alakján az $x = a \cdot 10^k$ alakot értjük, ahol $1 \leq |a| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$.
Megjegyzés1: A tudományos számológépeken az EXP vagy EE vagy $\wedge$ gombokkal lehet normálalakot megadni, pl. a $2 \cdot 10^{-3}$ számot így: 2EXP$\pm$3, ahol a $\pm$ gomb az előjelváltás és nem a kivonás gomb.
Megjegyzés2: Ide kapcsolódik a nagyságrend kifejezés. A milliós nagyságrend a legalább 1000000 és a legfeljebb 9999999 számokat takarja, ezek normálalakjában a 10 kitevője 6.

1.3.2. Feladat 4 perc

Írd fel az alábbi számokat normál alakban:
a) 23 000 000 b) 123 000 c) 56 700

d) 840 000 000 e) 0,00056 f) 0,000 000 012

M:
a) $2,3 \cdot 10^7$ b) $1,23 \cdot 10^5$ c) $5,67 \cdot 10^4$ d) $8,4 \cdot 10^8$
e) $5,6 \cdot 10^{-4}$ f) $1,2 \cdot 10^{-8}$

1.3.3. Feladat 15 perc

Írd át normálalakba az alábbi számokat[2]:
a) $200 \cdot 10^5$ b) $52 \cdot 10^6$ c) $1200 \cdot 10^2$ d) $12000 \cdot 10^8$
e) $0,87 \cdot 10^{10}$ f) $0,0009 \cdot 10^3$ g) $0,0034 \cdot 10^5$
h) $560 \cdot 10^{-5}$ i) $98 \cdot 10^{-23}$ j) $3400 \cdot 10^{-7}$
k) $0,007 \cdot 10^{-6}$ l) $0,023 \cdot 10^{-23}$ m) $0,0000004 \cdot 10^{-10}$

Tipp: Alkalmazd a TEVE[3] módszert!
M:
a) $2 \cdot 10^7$ b) $5,2 \cdot 10^7$ c) $1,2 \cdot 10^5$ d) $1,2 \cdot 10^{12}$ e) $8,7 \cdot 10^9$ f) $9 \cdot 10^{-1}$ g) $3,4 \cdot 10^2$ h) $5,6 \cdot 10^{-3}$ i)

[2]Véleményem szerint nem kell mindig ragaszkodni a normálalakhoz, ha csak az adott feladat nem kéri, mert ez egy lehetséges hibaforrás és ezek számát pl. fizika érettségin csökkenteni kell. Kompetencia mérésen viszont már előfordult ilyen típusú feladat, esetleg a saját eredményünknek a megoldással való összevetése miatt fontos ez az átalakítás.

[3]TEszünk és VEszünk, itt konkrétan tízeseket csoportosítunk át.

$9,8 \cdot 10^{-22}$ j) $3,4 \cdot 10^{-4}$ k) $7 \cdot 10^{-9}$ l) $2,3 \cdot 10^{-25}$
m) $4 \cdot 10^{-17}$

1.3.4. Feladat 20 perc

Add meg a következő műveletek eredményét normálalakban
a) 2 100 000 000 000 000 · 43 000 000 000 000
b) 870 000 000 000 000 · 45 000 000 000
c) 0,000 000 000 000 000 23 · 0,000 000 65
d) 0,000 000 000 25 · 42 000 000

e) $\frac{63\,000\,000\,000}{0{,}000\,000\,21}$ f) $\frac{0{,}000\,000\,12}{48\,000\,000\,000}$

g) $2,4 \cdot 10^{3} + 1,2 \cdot 10^{2}$ h) $5,6 \cdot 10^{6} + 3,2 \cdot 10^{5}$

M:
a) $9,03 \cdot 10^{28}$ b) $3,915 \cdot 10^{25}$ c) $1,495 \cdot 10^{-22}$ d) $1,05 \cdot 10^{-2}$ e) $3 \cdot 10^{17}$ f) $2,5 \cdot 10^{-18}$ g) $2,52 \cdot 10^{3}$ h) $5,92 \cdot 10^{6}$

1.3.5. Feladat 6 perc

Számold ki a következő műveleteket, az eredményt normálalakban, 3 jegyre, jelen esetben két tizedesjegyre kerekítve add meg:

a[4]) $6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(1{,}5 \cdot 10^{11})^2}$

b[5]) $\frac{1{,}98 \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}$

c[6]) $5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^{23}$

M:
a) $3,56 \cdot 10^{22}$ b) $1,24 \cdot 10^{24}$ c) $3 \cdot 10^{26}$

1.3.6. Feladat 7 perc

2014-ben Magyarország éves bruttó összterméke (GDP) 137 104 millió dollár volt, az USA éves bruttó összterméke pedig 17 418 925 millió dollár. A lakosságszám 10 millió és 319 millió.
a) Hányszorosa az USA éves bruttó összterméke

[4]Ennek a műveletnek az eredménye a Nap és a Föld közötti erőhatást adja N-ban. A képlet: $F = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, ahol f állandó, m_1 és m_2 két test tömege, r pedig a távolságuk, Newton fedezte fel, ezért esik lefelé az alma a fáról.

[5]Egy átlagos, 55Ah-s gépkocsi akkumulátorban ennyi db elektronnyi töltés tárolódik.

[6]Egy átlagos szobában$(4m \cdot 5m \cdot 3m)$ kb. ennyi db O_2 molekula repked.

a Magyarországihoz képest?
b) Hányszoros az egy főre eső megtermelt jövedelem az USA-ban hozzánk képest? A választ kerekítsd egészre.

M:
a) 127-szeres b) kb. 4-szeres

1.3.7. Feladat 6 perc

Határozd meg a Föld sűrűségét $\frac{kg}{m^3}$ mértékegységben, ha a tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, sugara pedig $6,37 \cdot 10^6$ m. A gömb térfogatát a $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ képlettel számoljuk.

Tipp: $\rho = \frac{m}{V}$
M:
$5540\frac{kg}{m^3}$

2. Műveletek polinomokkal, nevezetes azonosságok, szorzattá alakítás 180 perc

2.1. Műveletek polinomokkal

2.1.1. Példák polinomokra

$x-3$: egyváltozós, elsőfokú polinom
x^2+3x-5: egyváltozós, másodfokú polinom
$3x^3-6x^2+1$: egyváltozós, harmadfokú polinom
$3x^2y^3-5xy$: kétváltozós, ötödfokú polinom

2.1.2. Feladat 25 perc

Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, majd számold ki a polinomok helyettesítési értékét $x=0$, $x=1$ és $x=-1$ esetén:
a) $5x-3+3x-2$
b) $x^2-4x+2+3x^2-5x-5$
c) $6x+1-(4x-5)$
d) $x^2-x+1-(2x^2-4x+8)$
e) $x-3+2\cdot(-2x-4)$
f) $5x^2-x+9-3\cdot(x^2+4x-2)$
g) $2x^2+8x-2-4\cdot(3x^2-5x+7)$
h) $(3x-2)\cdot(4x-5)$

i) $(5x+3)\cdot(3x-1)$
j) $(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$
k) $(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$

🔔: Ügyelj a zárójel előtti ”-” jelre és a műveleti sorrendre!

M:

a) $8x-5$; a heyettesítési értékek sorrendben: -5; 3; -13
b) $4x^2-9x-3$; -3; -8; 10
c) $2x+6$; 6; 8; 4
d) $-x^2+3x-7$; -7; -5; -11
e) $-3x-11$; -11; -14; -8
f) $2x^2-13x+15$; 15; 4; 30
g) $-10x^2+28x-30$; -30; -12; -68
h) $12x^2-23x+10$; 10; -1; 45
i) $15x^2+4x-3$; -3; 16; 8
j) x^3-8; -8; -7; -9
k) x^3+8; 8; 9; 7

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az 1 helyen vett helyettesítési érték az együtthatók összegét adja.

2.2. Nevezetes azonosságok

2.2.1. Főbb nevezetes azonosságok

I. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
pl: $(3x+5)^2 = 9x^2 + 25 + 30x$

II. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
pl: $(2x-1)^2 = 4x^2 + 1 - 4x$

III. $(-a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
pl: $(-3x-5)^2 = 9x^2 + 25 + 30x$

IV. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
pl: $(2x+3) \cdot (2x-3) = 4x^2 - 9$

V. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
pl: $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

VI. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
pl: $(3x-2y+5)^2 = [3x + (-2y) + 5]^2 = 9x^2 + 4y^2 + 25 - 12xy + 30x - 20y$

2.2.2. Feladat 10 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $(2x+3)^2$ b) $(5x+2)^2$ c) $(4x+6)^2$ d) $(7x+2)^2$ e) $(x+3)^2$ f) $(x+4)^2$ g) $(2x+1)^2$ h) $(5x+1)^2$ i) $(3x+2y)^2$ j) $(5x+4y)^2$ k) $(x+7y)^2$ l) $(8x+3y)^2$ m) $(x+\frac{1}{2})^2$ n) $(4x+\frac{1}{3})^2$

Tipp: Alkalmazd a I. azonosságot!
M:
a) $4x^2+9+12x$ b) $25x^2+4+20x$ c) $16x^2+36+48x$ d) $49x^2+4+28x$ e) x^2+9+6x f) $x^2+16+8x$ g) $4x^2+1+4x$ h) $25x^2+1+10x$ i) $9x^2+4y^2+12xy$ j) $25x^2+16y^2+40xy$ k) x^2+49y^2+14xy l) $64x^2+9y^2+48xy$ m) $x^2+\frac{1}{4}+x$ n) $16x^2+\frac{1}{9}+\frac{8}{3}x$

2.2.3. Feladat 10 perc

a) $(3x-2)^2$ b) $(4x-3)^2$ c) $(5x-7)^2$ d) $(8x-4)^2$ e) $(x-2)^2$ f) $(x-5)^2$ g) $(3x-1)^2$ h) $(9x-1)^2$ i) $(2x-3y)^2$ j) $(4x-2y)^2$ k) $(x-3y)^2$ l) $(7x-6y)^2$ m) $(x-\frac{2}{3})^2$ n) $(2x-\frac{3}{4})^2$

Tipp: Alkalmazd a II. azonosságot!

M:
a) $9x^2+4-12x$ b) $16x^2+9-24x$ c) $25x^2+49-70x$ d) $64x^2+16-64x$ e) x^2+4-4x f) $x^2+25-10x$ g) $9x^2+1-6x$ h) $81x^2+1-18x$ i) $4x^2+9y^2-12xy$ j) $16x^2+4y^2-16xy$ k) x^2+9y^2-6xy l) $49x^2+36y^2-84xy$ m) $x^2+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}x$ n) $4x^2+\frac{9}{16}-3x$

2.2.4. Feladat 9 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $(-2x-3)^2$ b) $(-5x-2)^2$ c) $(-4x-6)^2$ d) $(-7x-2)^2$ e) $(-x-3)^2$ f) $(-x-4)^2$ g) $(-2x-1)^2$ h) $(-5x-1)^2$ i) $(-3x-2y)^2$ j) $(-5x-4y)^2$

Tipp: Alkalmazd a III. azonosságot!
M:
a) $4x^2+9+12x$ b) $25x^2+4+20x$ c) $16x^2+36+48x$ d) $49x^2+4+28x$ e) x^2+9+6x f) $x^2+16+8x$ g) $4x^2+1+4x$ h) $25x^2+1+10x$ i) $9x^2+4y^2+12xy$ j) $25x^2+16y^2+40xy$

2.2.5. Feladat 6 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $(5x+3)(5x-3)$
b) $(2x+7)(2x-7)$
c) $(3x+8)(3x-8)$
d) $(x+1)(x-1)$
e) $(x+11)(x-11)$
f) $(4x+12)(4x-12)$
g) $(5x+1)(5x-1)$
h) $(2x+3y)(2x-3y)$
i) $(5x+y)(5x-y)$
j) $(11x+12y)(11x-12y)$
k) $(x+\frac{3}{5})(x-\frac{3}{5})$
l) $(x+\frac{11}{12})(x-\frac{11}{12})$

Tipp: Alkalmazd a IV. azonosságot!
M:
a) $25x^2-9$ b) $4x^2-49$ c) $9x^2-64$ d) x^2-1 e) x^2-121 f) $16x^2-144$ g) $25x^2-1$ h) $4x^2-9y^2$ i) $25x^2-y^2$ j) $121x^2-144y^2$ k) $x^2-\frac{9}{25}$ l) $x^2-\frac{121}{144}$

2.2.6. Feladat 9 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:

a) $(x-1)^2$

b) $(11x+2)^2$

c) $(x+2)(x-2)$

d) $(10x-3)^2$

e) $(3x+2)(3x-2)$

f) $(3x+12)^2$

g) $(-5x-1)^2$

h) $(5x-9)^2$

i) $(3x+6)^2$

j) $(13x+2)(13x-2)$

k) $(x-13)^2$

l) $(2x+7)(2x-7)$

Tipp: Alkalmazd az I-IV. azonosságokat!

M:

a) x^2+1-2x b) $121x^2+4+44x$ c) x^2-4 d) $100x^2+9-60x$ e) $9x^2-4$ f) $9x^2+144+72x$ g) $25x^2+1+10x$ h) $25x^2+81-90x$ i) $9x^2+36+36x$ j) $169x^2-4$ k) $x^2+169-26x$ l) $4x^2-49$

2.2.7. Feladat 12 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $(x+2)^3$ b) $(x+1)^3$ c) $(2x+3)^3$ d) $(2x-3)^3$
e) $(5x-2)^3$

Tipp: Alkalmazd az V. azonosságot!
M:
a) $x^3+6x^2+12x+8$
b) x^3+3x^2+3x+1
c) $8x^3+36x^2+54x+27$
d) $8x^3-36x^2+54x-27$
e) $125x^3-150x^2+60x-8$

2.2.8. Feladat 9 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $(2x+3y+5)^2$ b) $(2x-3y-5)^2$ c) $(x+4y-6)^2$
d) $(x-2y-3)^2$

Tipp: Alkalmazd a VI. azonosságot!
M:
a) $4x^2+9y^2+25+12xy+20x+30y$

b) $4x^2 + 9y^2 + 25 - 12xy - 20x + 30y$
c) $x^2 + 16y^2 + 36 + 8xy - 12x - 48y$
d) $x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy - 6x + 12y$

2.2.9. Feladat 15 perc

Hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:
a) $2x - 3 - 2 \cdot (4x - 3)^2$
b) $3x^2 + 5x - 8 - 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$
c) $x^2 - x - 1 - (2x + 1)^2$
d) $(x + 5)^2 - (x - 2)^2$

M:
a) $-32x^2 + 50x - 21$ b) $5x + 4$ c) $-3x^2 - 5x - 2$
d) $14x + 21$

2.2.10. Példa - teljes négyzetté alakítás

A teljes négyzetté alakítás fontos eljárás, szükség van rá a másodfokú függvények ábrázolásánál, szélsőérték feladatok megoldásánál, valamint a koordináta geometriában a körnél.
a) Alakítsuk teljes négyzetté az $x^2 - 6x - 5$ ki-

fejezést!
M: Az x együtthatója -6, ezt el kell osztani 2-vel, így kapjuk a teljes négyzetet, amit korrigálunk a kapott szám (-3) négyzetének a kivonásával:
$(x-3)^2 - 9 - 5 = (x-3)^2 - 14$

b) Alakítsuk teljes négyzetté az $-x^2 + 6x + 5$ kifejezést!
M: Az x^2 együtthatója -1, ebben az esetben első lépésben kiemelünk -1-et, elvégezzük az átalakítást az előző módon, majd a végén visszaszorzunk mínusz eggyel:
$-x^2+6x+5 = -(x^2-6x-5) = -[(x-3)^2-14] = -(x-3)^2 + 14$

c) Alakítsuk teljes négyzetté az $2x^2 - 12x - 10$ kifejezést!
M: Ismét az a) esetre vezetjük vissza a megoldást azzal, hogy első lépésben kiemelünk kettőt:
$2x^2 - 12x - 10 = 2 \cdot (x^2 - 6x - 5) = 2 \cdot [(x-3)^2 - 14] = 2 \cdot (x-3)^2 - 28$

2.2.11. Feladat 16 perc

Alakítsd teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket:
a) $x^2 + 8x - 1$ b) $x^2 - 8x - 1$ c) $x^2 + 10x + 30$
d) $x^2 - 12x - 4$ e) $x^2 - 2x + 5$ f) $x^2 + 4x - 10$
g) $x^2 + 14x + 1$ h) $x^2 - 16x - 5$ i) $x^2 - 3x + 2$ j) $x^2 + 5x - 4$

M:
a) $(x + 4)^2 - 17$ b) $(x - 4)^2 - 17$ c) $(x + 5)^2 + 5$
d) $(x-6)^2-40$ e) $(x-1)^2+4$ f) $(x+2)^2-14$ g) $(x+7)^2-48$ h) $(x-8)^2-69$ i) $(x-1,5)^2-0,25$
j) $(x + 2,5)^2 - 10,25$

2.2.12. Feladat 6 perc

Alakítsd teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket:
a) $-x^2-6x+3$ b) $-x^2+2x+7$ c) $-x^2+10x+6$
d) $-x^2 - 20x - 40$

M:
a) $-(x+3)^2+12$ b) $-(x-1)^2+8$ c) $-(x-5)^2+31$
d) $-(x + 10)^2 + 60$

2.2.13. Feladat 12 perc

Alakítsd teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket:
a) $2x^2 - 8x + 10$ b) $2x^2 + 12x - 2$ c) $2x^2 - 20x + 8$
d) $3x^2 + 18x + 15$ e) $-2x^2 - 4x - 6$

M:
a) $2(x-2)^2 + 2$ b) $2(x+3)^2 - 20$ c) $2(x-5)^2 - 42$
d) $3(x+3)^2 - 12$ e) $-2(x+1)^2 - 4$

2.3. Szorzattá alakítás

A szorzattá alakítás, mint eljárás szintén fontos szerepet tölt be a matematikában. Alkalmazzuk az algebrai törtkifejezések átalakításainál, egyenleteket oldhatunk meg a segítségével. A két legfontosabb típusa a kiemelés és a nevezetes azonosságok fordított alkalmazása illetve ezek kombinációja.

2.3.1. Példa

Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:
a) $2x^3 - 8x^2 + 2x$
M: $2x$-et emelhetünk ki, amivel minden tagot

el kell osztanunk, így a szorzatalak: $2x(x^2 - 4x + 1)$. Érdemes visszaszorzással ellenőrizni az eredményt!

b) $ab + 3a - 2b - 6$
M: Itt a kiemelést kell többször alkalmazni. Az első két tagból kiemelünk a-t, az utolsó két tagból pedig -2-t, így kapjuk: $a \cdot (b + 3) - 2 \cdot (b + 3)$. Most kiemelünk $b + 3$-t, így a szorzatalak:
$(b + 3) \cdot (a - 2)$.[7]

c) $x^2 + 6x + 9$
Észrevehetjük, hogy ez a kifejezés éppen megegyezik $(x + 3)^2$ kifejezéssel és ezzel készen is vagyunk, mert ez már a szorzat alak. Felvetődik a kérdés, hogy hogyan lehet erre rájönni? Nagyon egyszerűen: gyakorlással!

d) $2x^2 + 12x + 18$
Észrevehetjük, hogy ki lehet emelni kettőt, így kapjuk: $2 \cdot (x^2 + 6x + 9)$. A zárójelben lévő

[7] Ezt a szorzattá alakítási módszert csoportosításnak nevezzük, az érettségin ritkábban fordul elő.

kifejezés tovább alakítható az I. nevezetes azonossággal, így a szorzat alak: $2 \cdot (x+3)^2$

Megjegyzés: A szorzattá alakítás során először mindig azt kell megvizsgálni, hogy lehet-e kiemelni, ezt követően pedig azt, hogy lehet-e tovább alakítani nevezetes azonosságot felhasználva.

2.3.2. Feladat 5 perc

Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket:
a) $x^2 + x$ b) $3x + 6$ c) $2x^2 - 4x$ d) $12a^2b - 15ab^2$
e) $6x^2 + 3x$

M:
a) $x(x+1)$ b) $3(x+2)$ c) $2x(x-2)$ d) $3ab(4a-5b)$
e) $3x(2x+1)$

2.3.3. Feladat 5 perc

Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket:
a) $ab + a + 5b + 5$ b) $ab + 4a - 5b - 20$

M:

a) $(a+5)(b+1)$ b) $(a-5)(b+4)$

2.3.4. Feladat 12 perc

Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket:
a) x^2+2x+1
b) x^2-4
c) $x^2-10x+25$
d) x^2-6x+9
e) $9x^2+6x+1$
f) x^2-1
g) $x^2-12x+36$
h) x^2-9
i) x^2-25
j) $4x^2-12x+9$
k) $x^2-20x+100$
l) $x^2+18x+81$
m) x^2-2x+1
n) $9x^2-1$
o) $16x^2-8x+1$

M:
a) $(x+1)^2$ b) $(x+2)(x-2)$ c) $(x-5)^2$ d) $(x-3)^2$
e) $(3x+1)^2$ f) $(x+1)(x-1)$ g) $(x-6)^2$ h)

$(x+3)(x-3)$ i) $(x+5)(x-5)$ j) $(2x-3)^2$ k) $(x-10)^2$ l) $(x+9)^2$ m) $(x-1)^2$ n) $(3x+1)(3x-1)$ o) $(4x-1)^2$

2.3.5. Feladat 10 perc

Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket:
a) $2x^2-2$
b) $2x^2-4x+2$
c) $2x^2+12x+18$
d) $3x^2-12$
e) $2x^2-50$
f) $3x^2+6x+3$
g) $3x^2-27$
h) $20x^2-20x+5$

M:
a) $2(x+1)(x-1)$ b) $2(x-1)^2$ c) $2(x+3)^2$ d) $3(x+2)(x-2)$ e) $2(x+5)(x-5)$ f) $3(x+1)^2$ g) $3(x+3)(x-3)$ h) $5(2x-1)^2$

3. Számelmélet 240 perc

3.1. Definíciók, tételek

A számelmélet a matematika egyik ága, mely eredetileg a természetes számok oszthatósági tulajdonságait vizsgálta. A számelmélet területén számos egyszerű, laikusok számára is könnyen érthető problémával találkozhatunk, amelyek megoldása azonban még a legnagyobb elméknek is komoly, sokszor megoldhatatlan kihívást jelent (pl. Nagy Fermat-tétel, ikerprím-sejtés). (lásd: magyar wikipédia-számelmélet)Egyik izgalmas terület a kriptográfia, amely az üzenetek titkosításával foglalkozik. Ezen alapul az internet jelentős része, pl. a biztonságos banki szolgáltatások, a személyes adatok védelme.

3.1.1. Definíció-oszthatóság

Ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor az a szám akkor osztója a b számnak, ha létezik olyan $c \in \mathbb{Z}$ szám, melyre $a \cdot c = b$. Jelölés: $a|b$.
Ebből a definícióból következnek a következő tételek

$(a, b, c \in \mathbb{Z})$:
$a|a$; $a|0$; Ha $a|b$, akkor $a|bc$. Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$. Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|b \pm c$.

3.1.2. Tétel-oszthatósági szabályok

Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{Z}$. Ekkor:
$2 \mid a \Leftrightarrow a$ páros számjegyre végződik
$3 \mid a \Leftrightarrow a$ számjegyeinek az összege osztható 3-mal
$4 \mid a \Leftrightarrow a$ utolsó két jegyéből képzett kétjegyű szám osztható néggyel
$5 \mid a \Leftrightarrow a$ 0-ra vagy 5-re végződik
$6 \mid a \Leftrightarrow 2 \mid a$ és $3 \mid a$
$8 \mid a \Leftrightarrow a$ utolsó három jegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal
$9 \mid a \Leftrightarrow a$ számjegyeinek az összege osztható 9-cel
$10 \mid a \Leftrightarrow a$ utolsó jegye nulla
$12 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid a$ és $4 \mid a$
$15 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid a$ és $5 \mid a$
$18 \mid a \Leftrightarrow 2 \mid a$ és $9 \mid a$
$24 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid a$ és $8 \mid a$
$36 \mid a \Leftrightarrow 4 \mid a$ és $9 \mid a$

3.1.3. Definíció-prímszámok

Prímszámnak azokat a pozitív egész számokat nevezzük, amelyeknek pontosan két osztója van.
Az 1 nem prímszám!!! (🔔)
Néhány prímszám: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

Megjegyzés1: A fehér színű függvénytáblázat 94. oldalán 4000-ig az összes prímszám megtalálható, a 95. oldalon pedig 1600-ig azok az összetett számok, amelyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel.

Megjegyzés2: Euklidesz ie. 300 körül az Elemek című művében lejegyezte annak a tételnek a bizonyítását, hogy végtelen sok prímszám létezik. A bizonyítás alapötlete az indirekt módszer, tegyük fel, hogy a prímszámok száma véges, ezek $p_1, ...p_n$. Ekkor a $p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$ szám ellentmondásra vezet mert vagy az előzőktől különböző prím vagy van olyan prím osztója, ami nem egyezik meg a korábbiakkal.

3.1.4. Tétel++ - a $\sqrt{2}$ irracionális

Bizonyítás: Indirekten bizonyítunk, tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális. Ekkor felírható két egész szám hányadosaként, tehát $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Feltehetjük, hogy a és b legnagyobb közös osztója 1, tehát a tört már tovább nem egyszerűsíthető. Négyzetre emelve az előző egyenlőséget, majd mindkét oldalt b^2-tel megszorozva kapjuk, hogy $2b^2 = a^2$. A bal oldal páros, így a jobb oldal is, viszont ez csak úgy lehet, hogy a páros, mert páratlan szám négyzete sem osztható kettővel. Viszont a páros számok négyzete már néggyel is osztható, tehát b^2 is páros, de ebből megintcsak következik, hogy b is páros. Ez ellentmond annak, hogy az a és a b legnagyobb közös osztója 1, tehát ellentmondásra jutottunk és ebből az következik, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

3.1.5. Tétel-a számelmélet alaptétele

Minden összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű módon.

3.1.6. Tétel-lnko; lkkt

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóján a közös osztók közül a legnagyobbat értjük. Rövid jelölés lnko ill. $(a; b)$.
Úgy határozzuk meg, hogy a prímtényezős felbontásban a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb kitevővel összorozzuk.
pl: $(72; 60) = (2^3 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 = 12$
Itt a kulcsszavak tehát: közös és legkisebb.

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösén a közös többszörösök közül a legkisebbet értjük. Rövid jelölés: lkkt ill. $[a; b]$.
Úgy határozzuk meg, hogy a prímtényezős felbontásban az összes előforduló prímtényezőt az előforduló legnagyobb kitevővel összeszorozzuk.
pl: $[72; 60] = [2^3 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3 \cdot 5] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
kulcsszavak: összes, legnagyobb

3.1.7. Definíció-relatív prím

Két pozitív egész számot akkor nevezünk relatív prímeknek, ha a legnagyobb közös osztójuk egy. Például 12 és 25 relatív prímek, viszont 7 és 14 nem azok.

3.1.8. Tétel-osztók száma+

Az $a = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$ szám osztóinak a száma: $(k_1+1) \cdot ... \cdot (k_n+1)$, ahol $p_1, ..., p_n$ prímszámok, $a, k_1, ..., k_n$ pedig pozitív egész számok.

3.2. Feladatok

3.2.1. Feladat 20 perc

Döntsd el az alábbi számokról, hogy prímek-e vagy sem!
a) 1 b) 6 c) 39 d) 71 e) 151 f) 187 g) 899 h) 941

Tipp: Mivel az osztók párban fordulnak elő, a prímosztókat legfeljebb a szám négyzetgyökének az egész részéig kell vizsgálni, tehát például 67 esetén 7-ig.

M:
Prímszámok: 71; 151; 941

3.2.2. Feladat 6 perc

Végezd el az alábbi számok prímtényezős felbontását:
a) 60 b) 1200 c) 560 d) 144

M:
a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ c) $2^4 \cdot 5 \cdot 7$ d) $2^4 \cdot 3^2$

3.2.3. Feladat 6 perc

Keresd meg az összes olyan x pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy $x + 5$ szintén prímszám!

Tipp: Próbálgass!
M:
Az egyedüli megoldás a 2, mert ez az egyetlen páros prímszám és ha bármely más prímszámhoz ötöt adunk, az már páros lesz, ami nem lehet prímszám.

3.2.4. Feladat 6 perc

Keresd meg az összes olyan x pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy $x+2$ és $x+10$ szintén prímszám!

Tipp: Próbálgass!
M:
Egyedüli megoldás a 3. Más megoldás azért nem lehet, mert 3-mal osztva 1 vagy 2 lehet csak a maradék (0 maradék nem lehet, mert akkor x nem lenne prím), viszont ezekhez 2-t vagy 10-et adva már hárommal osztható számot kapunk, ami nem lehet prím.

3.2.5. Feladat 20 perc

Milyen számjegy lehet az x, ha tudjuk, hogy:
a) $2|\overline{3492x}$ b) $3|\overline{3492x}$ c) $6|\overline{3492x}$ d) $4|\overline{3492x}$
e) $4|\overline{24234x4}$ f) $12|\overline{24234x4}$ g) $5|\overline{334345x}$ h) $9|\overline{17163234x}$
i) $36|\overline{17163234x}$

Tipp: Alkalmazd az oszthatósági szabályokat.
M:
a) 0, 2, 4, 6, 8 b) 0, 3, 6, 9 c) 0, 6 d) 0, 4, 8 e) 0,

2, 4, 6, 8 f) 2, 8 g) 0, 5 h) 0, 9 i) 0

3.2.6. Feladat 35 perc

Milyen számjegypár lehet az (x, y), ha tudjuk, hogy:
a) $12|\overline{76y91x}$ b) $12|\overline{873y345344x}$ c) $18|\overline{76y43x}$
d) $24|\overline{87385y13x}$ e) $36|\overline{123y456x}$ f) $45|\overline{44832y33x}$

Tipp: Alkalmazd az oszthatósági szabályokat.
M:
a) (2,2), (2,5), (2,8), (6,1), (6,4), (6,7)
b) (0,1), (0,4,), (0,7), (4,0), (4,3), (4,6), (4,9), (8,2), (8,5), (8,8)
c) (0,7), (2,5), (4,3), (6,1), (8,8)
d) (6,1), (6,4), (6,7)
e) (0,6), (4,2), (8,7)
f) (0,0), (0,9), (5,4)

3.2.7. Feladat 12 perc

Határozd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:
a) 24 és 30 b) 120 és 180 c) 288 és 1296

M:
a) 6 b) 60 c) 144

3.2.8. Feladat 3 perc

Az előző feladat eredményét felhasználva egyszerűsítsd a következő törteket:

a) $\frac{24}{30}$ b) $\frac{120}{180}$ c) $\frac{288}{1296}$

M:
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{9}$

3.2.9. Feladat 6 perc

Határozd meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:
a) 24 és 30 b) 120 és 180 c) 288 és 1296

M:
a) 120 b) 360 c) 2592

3.2.10. Feladat 7 perc

Az előző feladat eredményét felhasználva végezd el a következő műveleteket:

a) $\frac{5}{24}+\frac{7}{30}$ b) $\frac{11}{120}-\frac{7}{180}$ c) $\frac{13}{288}+\frac{11}{1296}$

M:
a) $\frac{53}{120}$ b) $\frac{19}{360}$ c) $\frac{139}{2592}$

3.2.11. Feladat 6 perc

Melyik az a háromjegyű szám, amely 7-tel, 8-cal és 9-cel osztva minden esetben egy maradékot ad?

Tipp: Változtass a feladaton!
M:
505

3.2.12. Feladat 5 perc

Melyik az a háromjegyű szám, amely 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 7-tel és 8-cal osztva minden esetben egy maradékot ad?

Tipp: Változtass a feladaton!
M:
841

3.2.13. Feladat 3 perc

Egy hosszú utca egyik oldalán 50 méterenként fák sorakoznak, a másikon 48 méterenként lámpák. Egy adott helyen éppen egymással szemben van egy fa és egy lámpa. Innen mekkora távolságban fordul ez megint elő?

M:
1200 m

3.2.14. Feladat 7 perc

Fanni a következőképpen számolt be a szülinapi bulijáról:
-Tíznél többen voltunk a partin.
-48 szendvics fogyott el.
-84 palacsintát ettünk meg.
-180 dl üditőt ittunk meg.

-Mindenki ugyanannyit fogyasztott mindenből. Hányan vettek részt a bulin?

M:
12-en

3.2.15. Feladat 6 perc

Mennyi lehet az x pozitív egész szám értéke, ha tudjuk, hogy $[x; 12] = 48$?

M:
16 vagy 48

3.2.16. Feladat 9 perc

Mennyi lehet az x pozitív egész szám értéke, ha tudjuk, hogy $[x; 36] = 288$?

M:
32, 96 vagy 288

3.2.17. Feladat+ 6 perc

Határozd meg a következő számok osztóinak a számát: a) 48 b) 60 c) 72 d) 81 e) 90

Tipp: Végezd el a prímtényezős felbontást, majd alkalmazd az osztók számára vonatkozó tételt!
M:
a) 10 b) 12 c) 12 d) 5 e) 12

3.2.18. Feladat++

Melyek azok a számok, amelyek esetén az osztók száma páratlan?

Tipp: Próbálgass!
M:
Négyzetszámok.

3.2.19. Feladat+++

A matematikát kedvelő király 100. születése napján jó kedvében a következő döntést hozza. Először nyissák ki a 100 cellát tartalmazó börtön minden ajtaját, majd minden másodikat zárjanak be, aztán minden harmadikat megint nyissanak ki, így tovább felváltva egészen százig. Amelyik cella ajtaja a végén nyitva lesz, az ott lévő rab megmenekül. Furulyás Palkó a 100. cellában raboskodik, mert szemet vetett a szép királyleányra. Visszanyeri-e szabadságát Furulyás Palkó? Összesen mennyi cellából szabadulnak ki a rabok?

Tipp: Próbálgass!
M:
Palkó megmenekül. 10 cellából menekülnek meg összesen.

3.3. Számrendszerek

10 féle ember van: Aki ismeri a számrendszereket és aki nem.
Az alábbiakban egy részletet olvashatsz a wikipédiából:
A történelem előtti időkben a számokat fából vagy kövekből faragott „pálcikák" reprezentálták. A kőkorszaki kultúrákban, ideértve az ősi amerikai indián csoportokat, a pálcikákat lovak, szolgák, személyes szolgáltatások adás-vételénél, illetve

szerencsejátékoknál használták.

A legelső írott emlékeket a pálcikák használatáról a sumerek hagyatékai között találták, agyagtáblákba karcolták, amelyeket később néha kiégettek. A sumerek a kissé különleges, a 10-es, 12-és és 60-as alapú számrendszer kombinációját használták az asztronómiai és egyéb számításaiknál. Ezt a rendszert átvették és az asztronómiában használták az ősi mediterrán nemzetek (akkádok, görögök, rómaiak és egyiptomiak). A rendszer maradványait könnyen felismerhetjük a mai idő- (órák, percek) és a szögmérésben (szögpercek).

3.3.1. Egy hekkelés rövid története

A régi Sim City játékban is várost lehetett építeni. Mint mindenhez, ehhez is pénzre volt szükség. A játék egy szövegfájlban volt elmentve, a pénz mennyisége pedig 16-os számrendszerben volt kódolva. A következőképpen lehetett több pénzt készíteni: Megnéztük a játékban, hogy mennyi dollárunk volt, pl. 123. Ezt átváltottuk 16-os számrendszerbe, ez 7B (a B betű a 11 számjegynek felel meg, mert 16-os számrendszerben nullától 15-ig lehetnek számjegyek). Ezt követően a szövegfájlban rákerestünk erre a 7B karaktersorozatra és átírtuk pl. FF-re (F a 15-nek felel meg), ami $15 \cdot 16 + 15 = 255$. Így korlátlanul lehetett építkezni a játékban.

3.3.2. Példa

Vizsgáljuk meg, hogy mit is jelent a számrendszer és hogyan lehet átváltani egy számot az egyik számrendszerből a másikba.

A tízes számrendszerben a 10 hatványait használjuk. A 123 szám alatt azt értjük, hogy van 3 db egyesünk (10^0), 2 db tízesünk (10^1) és 1 db százasunk (10^2). A nyolcas számrendszerbeli 123 átírva tízesbe $3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 64 = 83$-at jelent. Ez a példa mutatja, hogy hogyan lehet átváltani egy adott számrendszerbeli számot tízesbe. A fordított folyamat elvégzésére 3 módszert mutatunk.

3.3.3. Példa

Írjuk át a 83-at nyolcas számrendszerbe.

M1: 8 egész hatványai nullától kezdve 1, 8, 64. 83-ban a 64 egyszer van meg, a maradék 19. Ebben a 8 kétszer van meg, a maradék pedig 3. Tehét a 83 megadható $1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 3$ alakban, innen a nyolcas számrendszerbeli alakja 123_8.

M2 Euklidészi algoritmus: Maradékos osztást végzünk 8-cal mindaddig, míg 0 nem lesz a hányados. Ekkor a maradékok visszafelé leírva adják a keresett számot:
83:8=10, a maradék 3, 10:8=1, a maradék 2, végül 1:8=0, a maradék 1. A maradékokat visszafelé leírva kapjuk 83-nak a nyolcas számrendszerbeli alakját: 123_8. Ennél a módszernél tehát a maradékok játszák a főszerepet.

M3 Számológéppel: Egyes gépeken (pl. Sharp EL-520 sorozat[8]) felfedezhetünk pen, dec, oct,

[8]Én személy szerint ezt a gépet ajánlom, mert napelemes (környezettudatos), van benne többféle statisztika, egyszerű vele az

hex, bin feliratokat. Ezek sorrendben az ötös, tízes, nyolcas, tizenhatos és kettes számrendszert jelölik. Ezeket alkalmazva tudunk átírni számokat más számrendszerekbe. Pl: 83 2ndf gomb oct gomb, az eredmény 123 lesz. Vissza a 2ndf dec kombinációval válthatunk.

3.3.4. Feladat 9 perc

Írd át az alábbi számokat tízes számrendszerbe:
a) 1011_2 b) 110001_2 c) 1201_3 d) 2102_3 e) $34C_{16}$ (C betű a 12-es számjegyet jelöli)

M:
a) 11 b) 49 c) 46 d) 65 e) 844

3.3.5. Feladat 12 perc

Írd át kettes és hármas számrendszerbe az alábbi számokat:
a) 30 b) 47 c) 100

átszámolás radiánba és vissza, beépítve megtalálhatók a fizikai konstansok.

M:
a) 11110_2, 1010_3 b) 101111_2, 1202_3 c) 1100100_2, 10201_3

3.4. Kapcsolódó érettségi és verseny feladatok

3.4.1. Feladat 3 perc

Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
A) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.
B) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.
C) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.[9]

M:
A) H (pl. 4 és 8) B) I C) H (pl. 3 és 5)

3.4.2. Feladat 2 perc

Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis!
Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége

[9] Érettségi feladat (Közép, 2013 okt. 4.; 2 pont)

prímszám.[10]

M:
H (pl. 5 és 3)

3.4.3. Feladat 2 perc

Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! [11]

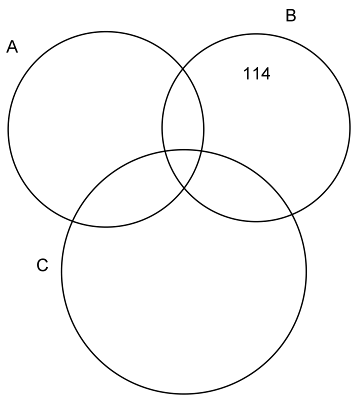
M:
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

3.4.4. Feladat 22 perc

Tekintsük a következő halmazokat:
$A = \{$a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok$\}$;
$B = \{$a 300-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész
$C = \{$a 400-nál nem nagyobb 4-gyel osztható pozitív egész
a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába!

[10] Érettségi feladat (Közép, 2012 okt. 7/B.; 1 pont)
[11] Érettségi feladat (Közép, 2011 okt. 1.; 2 pont)

	A halmaz	B halmaz	C halmaz
114	nem eleme	eleme	nem eleme
52			
78			
124			
216			



b) Határozza meg $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát!
c+) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B, sem a

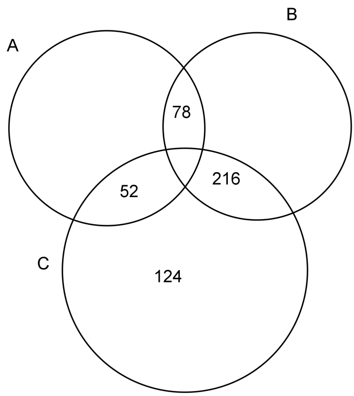
C halmaznak![12]

M:

a)

	A halmaz	B halmaz	C halmaz
52	eleme	nem eleme	eleme
78	eleme	eleme	nem eleme
124	nem eleme	nem eleme	eleme
216	nem eleme	eleme	eleme

[12] Érettségi feladat (Közép, 2012 máj. 16.; 8-3-6 pont)



b) Összesen 8 db ilyen szám van.
c) $\frac{50}{100}$

3.4.5. Feladat 16 perc

a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ halmaznak?
b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?
c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket

tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne?[13]

M:
a) 840 b) 15625 c) 360

3.4.6. Feladat++

Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.
a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?
c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám![14]

M:
a) 120 b) 24 c) A számjegyek összege 21, ebből az következik, hogy a számok mindegyike osztható hárommal, viszont egyik sem osztható kilenccel, így nem lehet négyzetszám egyik sem.

[13] Érettségi feladat (Közép, 2011 okt. 17.; 3-6-8 pont)
[14] Érettségi feladat (Emelt, 2006 febr. 2.; 2-6-4 pont)

3.4.7. Feladat+++

Arany Dániel matematika verseny (2015 Kezdők I–II. kategória, II. forduló) 4. oldal 3. feladata

3.4.8. Feladat+++

Arany Dániel matematika verseny (2014 Kezdők I–II. kategória, II. forduló) 4. oldal 2. és 5. feladata

4. Műveletek algebrai törtkifejezésekkel 180 perc

Az alábbiakban a szorzattá alakítás alkalmazásaként az alábbi műveletekre láthatunk feladatokat:
értelmezési tartomány meghatározása
egyszerűsítés
szorzás, osztás
összeadás-kivonás

4.1. Tört értelmezési tartománya

4.1.1. Példa-tört értelmezési tartományának a meghatározása

Állapítsuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyre a következő kifejezés értelmezve van: $\frac{2x^2+4x-5}{3x^3-12x}$

M: A nevezőben nem lehet nulla, vagyis:

$3x^3 - 12x \neq 0 \Leftrightarrow 3x(x+2)(x-2) \neq 0$

A szorzatalakból látszik, hogy ez a kifejezés akkor lenne nulla, ha $x = 0$ vagy $x = -2$ vagy $x = 2$, vagyis a legbővebb értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}$

4.1.2. Feladat 25 perc

Állapítsd meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyre a következő kifejezések értelmezve vannak:

a) $\frac{x+3}{x+4}$ b) $\frac{2x-4}{9x+3}$ c) $\frac{x+1}{x^2+x}$ d) $\frac{x-1}{x^2-x}$ e) $\frac{5x+1}{x^2+9+6x}$ f) $\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$

g) $\frac{x}{x^2-4}$ h) $\frac{10x-3}{x^2-121}$ i) $\frac{17x-3}{x^2-144}$ j) $\frac{9x+7}{2x^2-32}$ k) $\frac{5x^2}{x^3-12x^2+36x}$

l) $\frac{3x^2+4x-7}{3x^3-75x}$ m) $\frac{x^2+2}{3x^2+12x+12}$

M:
a) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$
d) $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
g) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ h) $\mathbb{R} \setminus \{-11; 11\}$ i) $\mathbb{R} \setminus \{-12; 12\}$
j) $\mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$ k) $\mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$ l) $\mathbb{R} \setminus \{0; -5; 5\}$
m) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

4.2. Tört egyszerűsítése

4.2.1. Példa-törtek egyszerűsítése

a) Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{12a^2b^4(c-2)}{18ab^3(c-2)^2}$
M: Külön-külön koncentráljunk a számokra, a-ra, b-re, $c-2$-re, így kapjuk az egyszerűsített alakot: $\frac{2ab}{3(c-2)}$

b) Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{6x+6}{2x^2-2}$
M: Szorzattá kell alakítanunk a számlálót és a nevezőt is, ezek után a közös tényezőkkel (2 és $x+1$) egyszerűsíthetünk:
$\frac{6x+6}{2x^2-2} = \frac{6(x+1)}{2\cdot(x+1)(x-1)} = \frac{3}{x-1}$
Megjegyzés: Ellentett kifejezésekkel is egyszerűsíthetünk, ekkor az egyikből 1, a másikból -1 marad. Például:

$\frac{x-2}{2-x} = \frac{1}{-1} = -1$

4.2.2. Feladat 25 perc

Egyszerűsítsd a következő törteket:
a) $\frac{9ab^2(c+1)}{15a^2b(c+1)^2}$ b) $\frac{26a^6b^3(c-5)^2}{169a^2b(c-5)}$ c) $\frac{15x-35}{12x-28}$ d) $\frac{18x-18}{24x-24}$
e) $\frac{18x^2+6x}{12x^2+4x}$ f) $\frac{15x^2+30x}{9x^2+18x}$ g) $\frac{x^2-1}{x^2+1+2x}$ h) $\frac{x-3}{x^2-9}$
i) $\frac{x^2+169-26x}{2x-26}$ j) $\frac{2x^2-18}{3x^2+27+18x}$ k) $\frac{x^3-25x}{x^3+25x-10x^2}$

M:
a) $\frac{3b}{5a(c+1)}$ b) $\frac{2a^4b^2(c-5)}{13}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{5}{3}$ g) $\frac{x-1}{x+1}$
h) $\frac{1}{x+3}$ i) $\frac{x-13}{2}$ j) $\frac{2(x-3)}{3(x+3)}$ k) $\frac{x+5}{x-5}$

4.3. Törtek szorzása, osztása

4.3.1. Példa-törtek szorzása, osztása

Végezzük el az alábbi műveletet: $\frac{2x^2-2}{2x^2+2+4x} : \frac{3x^2-3x}{x^2+x}$
M: A megoldás kulcsa most is a szorzattá alakítás, ezt végezzük el és az osztó reciprokával szorzunk, így kapjuk: $\frac{2(x+1)(x-1)}{2(x+1)^2} \cdot \frac{x(x+1)}{3x(x-1)}$ és az egyszerűsítések után az eredmény $\frac{1}{3}$.
♠: Amikor egyszerűsítünk, akkor mindíg húzzuk át azt, amit egyszerűsítünk és írjuk oda helyére

azt a kifejezést, ami maradt, így elkerülhetjük, hogy hibázzunk. (Itt a típushiba a 3 végeredmény.)

4.3.2. Feladat 12 perc

Végezd el az alábbi műveleteket:
a) $\frac{12a^2}{14a} \cdot \frac{21a^3}{18a^5}$ b) $\frac{5x+5}{15x-15} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{2x-6}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+9+6x}{9-3x}$

d) $\frac{3a^2b^3}{2ab^4} : \frac{6a^3b^2}{8a^2b}$ e) $\frac{x^2-4}{2x+4} : \frac{x^2-4x+4}{3x-6}$

M:
a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{2(x+3)}{3(x-3)}$ d) $\frac{2}{b^2}$ e) $\frac{3}{2}$

4.4. Törtek összeadása, kivonása

4.4.1. Előkészítő feladat 9 perc

Állapítsd meg a következő kifejezések legkisebb közös többszörösét:
a) x ill. $x+1$ b) x ill. x^2+x c) $12x^2y^3$ ill. $8x^3y$
d) x^2-1 ill. $2x+2$ e) x^2-4 ill. x^2-4x+4

Tipp: Alakíts szorzattá, majd szorozd össze az összes előforduló kifejezést az előforduló legnagyobb kitevővel!

M:
a) $x(x+1)$ b) $x(x+1)$ c) $24x^3y^3$ d) $2(x-1)(x+1)$
e) $(x+2)(x-2)^2$

4.4.2. Példa-törtek összeadása, kivonása

Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{7}{120}+\frac{11}{90}$

M: Bővítéssel közös nevezőre kell hozni a törteket, ezután lehet őket összeadni:
$\frac{21}{360}+\frac{44}{360}=\frac{65}{360}=\frac{13}{72}$

b) $\frac{3}{x}-\frac{x-1}{x-2}$

M: A közös nevező $x(x-2)$, erre bővítjük a törteket:
🔔: A második törtvonal előtt mínusz jel áll, ezért zárójelet kell alkalmaznunk!!!
$\frac{3}{x}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{3(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)}=\frac{3x-6-x^2+x}{x(x-2)}=\frac{-x^2+4x-6}{x(x-2)}$

c) $\frac{3}{2x+10}-\frac{x+3}{x^2-25}$

M: A közös nevező meghatározása előtt szorzattá kell alakítanunk a nevezőket:
$2x + 10 = 2(x + 5)$ és $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$
A közös nevező $2(x + 5)(x - 5)$ lesz, így az első törtet $x-5$-tel, a másodikat kettővel kell bővíteni (🔔zárójel!!!):

$$\frac{3x-15-(2x+6)}{2(x+5)(x-5)} = \frac{3x-15-2x-6}{2(x+5)(x-5)} = \frac{x-21}{2(x+5)(x-5)}$$

Megjegyzés: A dupla előjelváltás technikáját (duplán váltunk előjelet, ezzel nem változtatunk az értéken) akkor alkalmazzuk, ha két tört nevezőjében két kifejezés ellentettjei egymásnak. Erre egy egyszerű példa:
$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{1-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{x-3}{x-1}$

4.4.3. Feladat 75 perc

Végezd el a következő műveleteket:

a) $\frac{x+3}{x+1} - \frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{5-2x}{2x+3} - \frac{3x-4}{2x+3}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ d) $\frac{x-1}{2x+6} - \frac{x+1}{3x+9}$

e) $\frac{4x-3}{5x-20} - \frac{2-4x}{4x-16}$ f) $\frac{3}{2x+2} - \frac{3x+2}{x^2-1}$ g) $\frac{8x-1}{x^2-25} - \frac{4}{2x-10}$

h) $\frac{7}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+9-6x}$ i) $\frac{2x-3}{x^2-2x+1} - \frac{3x+5}{x^2-1}$

j) $\frac{5x-2}{2x+8} - \frac{x^2-3x+4}{3x^2-48} - \frac{2x-5}{6x-24}$ k) $\frac{x}{3x-3} - \frac{x^2-7x+2}{1-x^2} + \frac{8x-3}{2x+2}$

M:
a) $\frac{6}{x+1}$ b) $\frac{-5x+9}{2x+3}$ c) $\frac{x+y}{xy}$ d) $\frac{x-5}{6(x+3)}$ e) $\frac{36x-22}{20(x-4)} = \frac{18x-11}{10(x-4)}$ f) $\frac{-3x-7}{2(x+1)(x-1)}$ g) $\frac{6x-11}{(x-5)(x+5)}$ h) $\frac{4x-30}{(x+3)(x-3)^2}$ i) $\frac{-x^2-3x+2}{(x+1)(x-1)^2}$ j) $\frac{11x^2-63x+36}{6(x+4)(x-4)}$ k) $\frac{32x^2-73x+21}{6(x+1)(x-1)}$

4.4.4. Feladat 3 perc

Igazold, hogy ha $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ és $x, y, z \neq 0$, akkor $x = \frac{yz}{y+z}$.

4.5. Kapcsolódó érettségi feladatok

4.5.1. Feladat 3 perc

Egyszerűsítse a következő törtet $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$, ahol $x \neq 3$ és $x \neq -3$. [15]

[15] Érettségi feladat (Közép, 2012 máj. 11.; 3 pont)

M:
$\frac{x-3}{x+3}$

4.5.2. Feladat 3 perc

Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $\frac{a^2-b^2}{a-b} = 20$. Mekkora $a+b$ értéke?[16]

M:
20

[16] Érettségi feladat (Közép, 2006 máj. 5.; 2 pont)

Tartalomjegyzék